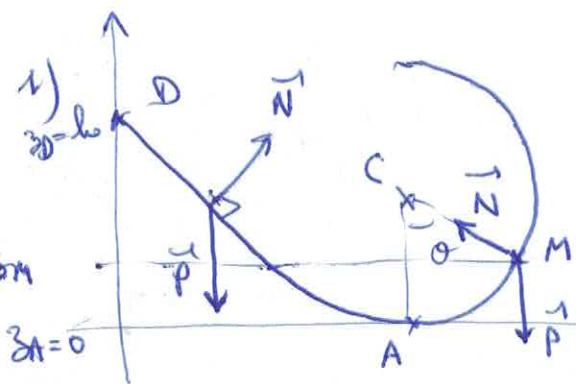


Loopy



M mlit :

$\times$ son poids ; force conservative $E_{pfs} = + mgs$
 (sz vers le haut)
 $\times$ la réaction du support ; elle ne travaille pas
 car il n'y a pas de frottements et elle est $\perp$
 au mouvement

2) donc le système est conservatif et son énergie mécanique s'écrit,

$$E_m = \frac{m v^2}{2} + mgs$$

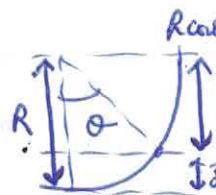
On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre D et M :

On a : $z_D = h_0$ et $v_D = 0$

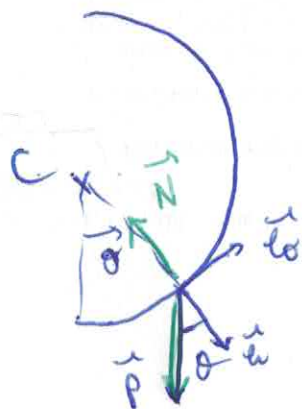
$$z_M = R - R \cos \theta$$

$$E_{mD} = E_{mM} \quad \text{soit} \quad 0 + mgh_0 = \frac{m v^2}{2} + mgR - mgR \cos \theta$$

$$\text{d'où} \quad v = \sqrt{2g(h_0 - R + R \cos \theta)}$$



3)



RFD appliquée à M : $m \vec{a}(M_k = \vec{P} + \vec{N})$

$$\text{avec } \vec{OM} = R \vec{e}_r \quad \vec{v}/M_k = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \vec{a}/M_k = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

$$= \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

$$\text{soit} \quad m \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta - m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r = \vec{P} + \vec{N}$$

$$\text{on projette sur } \vec{e}_r : -m \frac{v^2}{R} = \underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}_{\parallel \vec{P} \parallel \cos \theta} = \parallel \vec{N} \parallel$$

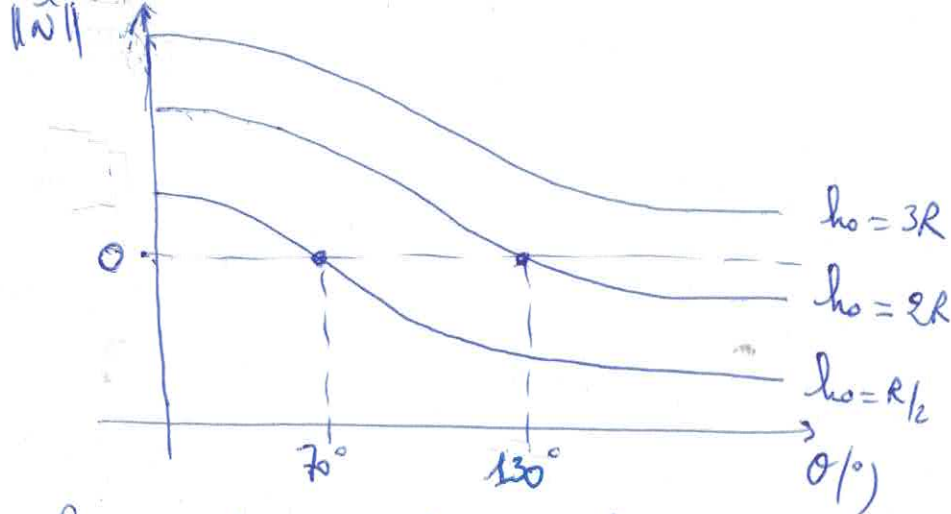
$$\parallel \vec{P} \parallel \cos \theta = mg \cos \theta$$

$$\text{d'où} \quad \parallel \vec{N} \parallel = mg \cos \theta + \frac{m v^2}{R}$$

$$= mg \cos \theta + 2mgh_0 - 2mgR + 2mgR \cos \theta$$

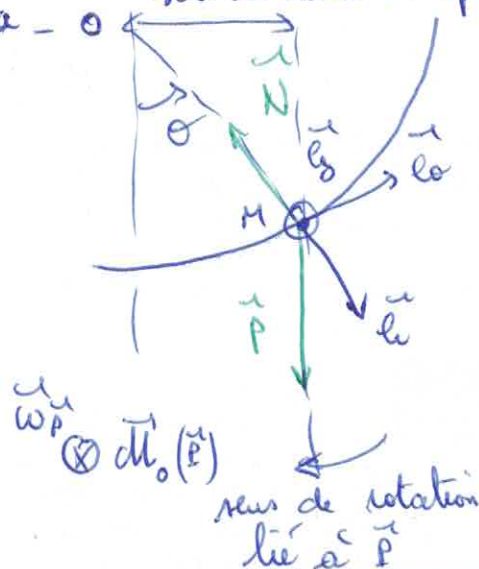
$$\parallel \vec{N} \parallel = mg [2h_0 - 2R + 3R \cos \theta]$$

4) — Et après l'expression de $\parallel \vec{N} \parallel$, on note que plus h_0 est grand et plus la réaction du support est intense, cette remarque permet d'identifier les courbes.



Pour que le solide fasse un looping, il faut que la réaction du support ne s'annule pas (en effet lorsqu'elle s'annule, le solide perd le contact avec le support et tombe avant d'atteindre le sommet).

5) a - 0 $\rightarrow$ bras de levier du poids : $d = R \sin \theta$



$$\vec{M}_O(\vec{N}) = \vec{0} \quad \text{car } \vec{N} \text{ est incapable de faire tourner } M \text{ autour de } O$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -\vec{e}_\theta \times mg R \sin \theta$$

5) b. Théorème du moment cinétique appliqué à M : $\frac{dL_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{N})$
 avec $L_O(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(M) = R \vec{e}_1 \wedge m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_3$

$$d'où : m R^2 \ddot{\theta} = -mg R \sin \theta \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0}$$

5) c. Pour des petits angles on a : $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0$: il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ et de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad \text{La solution de l'équation différentielle est de la forme}$$

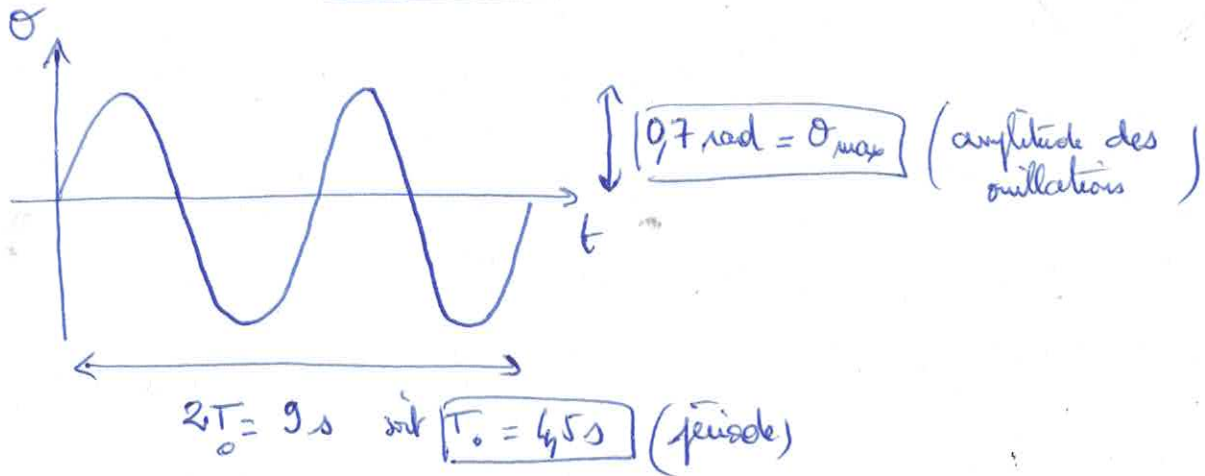
$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ avec pour conditions initiales :

$$\theta(t=0) = 0 = A$$

d'après le système en 2)

$$\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_A}{R} = \frac{v(\theta=0)}{R} = \frac{\sqrt{2gh_0}}{R} = B \omega_0 \quad \text{d'où } A=0 \text{ et } B = \frac{\sqrt{2gh_0}}{R \omega_0} = \sqrt{\frac{2h_0}{R}}$$

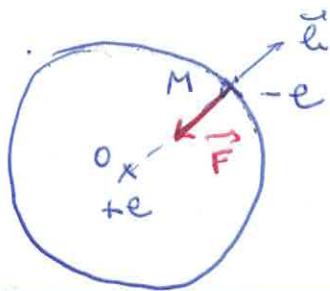
On a donc: $\boxed{\theta(t) = \sqrt{\frac{2h_0}{R}} \sin(\omega_0 t)}$



On $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ d'où $T_0^2 = 4\pi^2 \frac{R}{g}$ soit $\boxed{R = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2}} = 5.0 \text{ m}$

$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{2h_0}{R}}$ d'où $\theta_{\max}^2 = \frac{2h_0}{R}$ soit $\boxed{h_0 = \frac{R\theta_{\max}^2}{2}} = 1.2 \text{ m}$

1)



Modèle de Bohr

la force exercée par le proton sur l'électron s'écrit : $\vec{F} = - \frac{e \cdot e}{4\pi\epsilon R^2} \vec{e}_r$ (force attractive)

2) RFD appliquée à l'électron : $m_e \vec{a}(M_k) = \vec{F}$

avec $\vec{OM} = R \vec{e}_r$

$\vec{v}(M_k) = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$\vec{a}(M_k) = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$
 $= \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$

soit $m_e \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta - m_e \frac{v^2}{R} \vec{e}_r = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon R^2} \vec{e}_r$

en projection sur $\vec{e}_\theta$: $\frac{dv}{dt} = 0$ soit $v = \text{cte}$: la M_k est uniforme

sur $\vec{e}_r$: $- m_e \frac{v^2}{R} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon R^2}$ soit $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon m_e R}}$

3) L'énergie potentielle de la force électrique est $E_p = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon R}$

L'énergie cinétique est : $E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{m_e}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon m_e R} = - \frac{1}{2} \frac{-e^2}{4\pi\epsilon R} = - \frac{E_p}{2}$

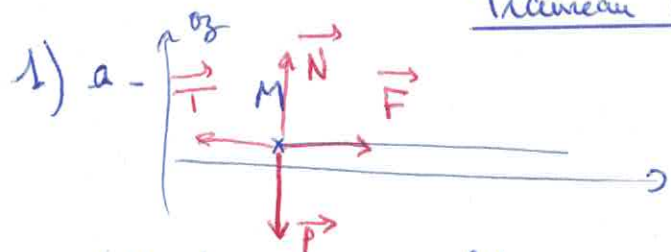
4) Le moment cinétique de l'électron par rapport à O s'écrit :

$\vec{L}_O(M_k) = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v}(M_k) = R \vec{e}_r \wedge m_e v \vec{e}_\theta = m_e R v \vec{e}_z$

d'où en nous : $L = m_e R v = \sqrt{\frac{e^2 R m_e}{4\pi\epsilon}}$

5) $L = m \hbar = \sqrt{\frac{e^2 R m_e}{4\pi\epsilon}}$ donc $m^2 \hbar^2 = \frac{e^2 R m_e}{4\pi\epsilon}$ soit $R = m^2 \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon}{m_e e^2}$
 rayon de Bohr : a_0

Traîneau tiré par des chiens



(il n'y a pas de frottements fluide car M est immobile donc $\vec{v}(M/K) = \vec{0}$)

$$RFD : \vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}$$

M immobile

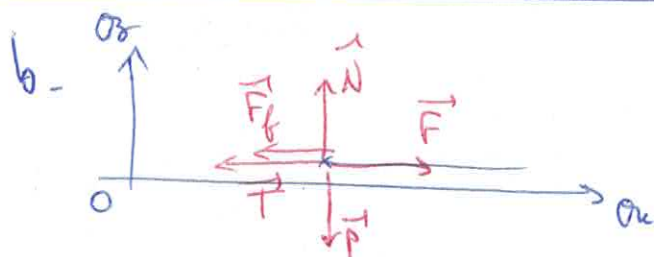
On en projection sur (Ox) : $0 = -T + F$ soit $T = F$

$$\text{sur } (Oz) : 0 = -mg + N \text{ soit } N = mg$$

d'après les lois de Coulomb : $T < fN$

$$\text{soit } \boxed{F < fmg} \text{ condition d'équilibre du traîneau}$$

Le traîneau va donc démarquer pour $\boxed{F \geq fmg} = 26 \text{ SN}$



$$RFD : m \vec{a}(M/K) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_d$$

$$\text{en projection sur } (Ox) : m \ddot{x} = -T + F - \beta \dot{x}$$

$$\text{sur } (Oz) : 0 = -mg + N$$

d'après les lois de Coulomb : $T = fN = fmg$

$$\text{d'où } m \ddot{x} = -fmg + F - \beta \dot{x} \quad \text{avec } v = \dot{x} \text{ et } \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

$$\text{d'où l'équation différentielle : } \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v = \frac{F - fmg}{m}}$$

$$\text{On identifie avec l'énoncé : } \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\ell}{\tau}$$

$$\text{soit } \boxed{\tau = \frac{m}{\beta}} \text{ et } \frac{v_\ell}{\tau} = \frac{\beta v_\ell}{m} = \frac{F - fmg}{m} \text{ soit } \boxed{v_\ell = \frac{F - fmg}{\beta}}$$

τ est le temps de relaxation, il caractérise la durée du régime transitoire
 v_ℓ est la vitesse limite atteinte en régime permanent

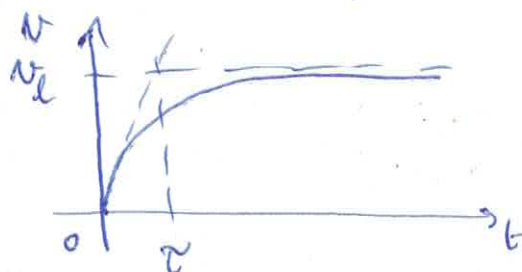
c - Solution particulière : $v_p = v_\ell$

Solution générale : $v_g = A e^{-t/\tau}$

$$\text{soit } v(t) = v_\ell + A e^{-t/\tau} \quad / \quad \text{on trouve A avec les conditions initiales :}$$

$$v(t=0) = 0 = v_\ell + A \text{ soit } A = -v_\ell$$

$$\text{On a donc } \boxed{v(t) = v_\ell (1 - e^{-t/\tau})}$$



d - On a $v_{\ell} = 3 \text{ ms}^{-1}$ et $v(t_1) = 0,95 v_{\ell}$

soit la réponse : $v(t_1) = v_{\ell} (1 - e^{-t_1/\tau}) = 0,95 v_{\ell}$

d'où $1 - e^{-t_1/\tau} = 0,95$ et $e^{-t_1/\tau} = 0,05$

on a donc $\frac{t_1}{\tau} = -\ln(0,05)$ soit $\tau = -\frac{t_1}{\ln(0,05)} = \frac{m}{\beta}$

On en déduit β : $\boxed{\beta = \frac{m \ln(0,05)}{t_1}} = 300 \text{ kg.s}^{-1}$

Rq : je peux vérifier l'unité de β :

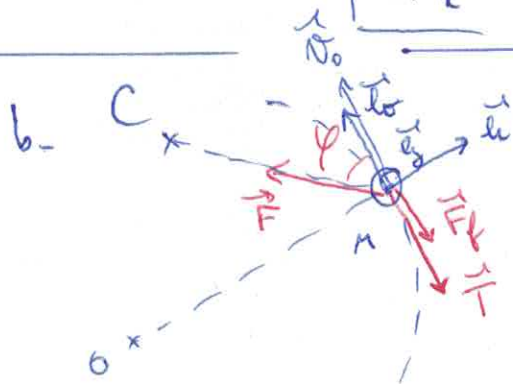
$$[\beta] = \left[\frac{F_f}{v} \right] = \frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m.s}^{-1}} = \text{kg.s}^{-1}$$

On a aussi $v_{\ell} = \frac{F - f_{mg}}{\beta}$ soit $\boxed{F = f_{mg} + \beta v_{\ell}} = 1150 \text{ N}$

2) a - Position : $\vec{OM} = R \vec{e}$

Vitesse : $\vec{v}(M)_O = R \dot{\theta} \vec{e}_{\theta} = v_0 \vec{e}_{\theta}$ soit $v_0 = R \dot{\theta}$

accélération : $\boxed{\vec{a}(M)_O = v_0 \frac{d\vec{e}_{\theta}}{dt} = -v_0 \dot{\theta} \vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r}$



⊗ $\vec{F}$ (s'enfonce dans la feuille)
 ⊙ $\vec{N}$ (tient nos nous)
 (forces de frottements opposées à $\vec{v}$)

PFD appliquée à M : $m \vec{a}(M)_O = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{T} + \vec{F} = -m \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r$

on projette sur $\vec{e}_r$: $-m \frac{v_0^2}{R} = \vec{F} \cdot \vec{e}_r = F \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -F \sin \varphi$

soit $\boxed{m \frac{v_0^2}{R} = F \sin \varphi}$

sur $\vec{e}_{\theta}$: $0 = \vec{F} \cdot \vec{e}_{\theta} - \beta \vec{v} \cdot \vec{e}_{\theta} - T = F \cos \varphi - \beta v_0 - T$

soit $\boxed{F \cos \varphi = T + \beta v_0}$

sur $\vec{e}_y$: $0 = -mg + N$ soit $\boxed{N = mg}$

c. On combine avec les lois de Coulomb : $T = fN = fmg$

3/3

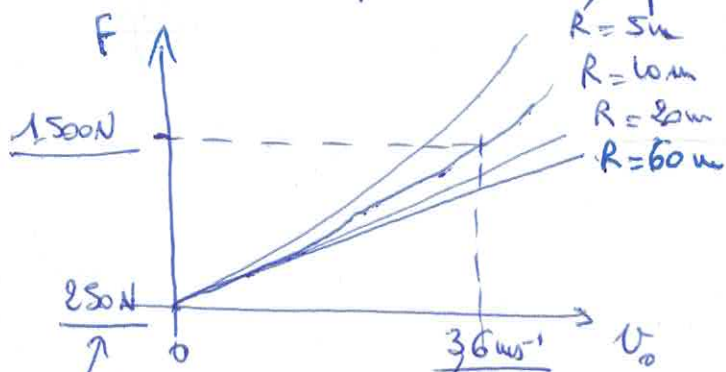
$$\text{soit } \begin{cases} m \frac{v_0^2}{R} = F \sin \varphi & (1) \\ fmg + \beta v_0 = F \cos \varphi & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) & \text{ donne } \tan \varphi = \frac{m v_0^2 / R}{fmg + \beta v_0} \\ (2) & \end{aligned}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \text{ donne } \frac{m^2 v_0^4}{R^2} + (fmg + \beta v_0)^2 = F^2 \sin^2 \varphi + F^2 \cos^2 \varphi = F^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = F^2$$

$$\text{d'où } F = \sqrt{\frac{m^2 v_0^4}{R^2} + (fmg + \beta v_0)^2}$$

d. Dans l'expression de F , plus R est grand et plus F est petite



on retrouve bien la
valeur de F pour que le
traineau démarre (question 1a)

pour $R = 10\text{m}$: $F = 1500\text{N}$ on

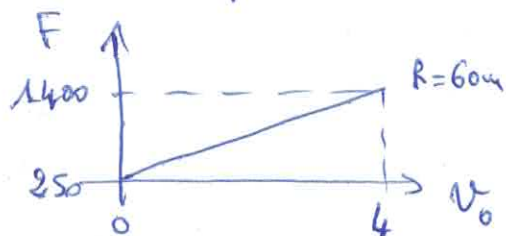
lit $v_0 = 36\text{ms}^{-1}$

$$\text{d'où } \tan \varphi = \frac{m v_0^2 / R}{fmg + \beta v_0} = 0,49$$

$$\text{soit } \varphi = 26^\circ$$

pour $R = 60\text{m}$, le terme $\frac{m^2 v_0^4}{R^2}$ est négligeable on a : $F = fmg + \beta v_0$

Ainsi F en fonction de v_0 est une droite de pente β :



$$\text{pente : } \frac{1400 - 250}{4 - 0} = 290 \text{ kg.s}^{-1} : \text{on retrouve bien la valeur de } \beta$$

question 1)d.