TD dynamique en référentiel non galiléen

Pour les exercices, la méthode est la suivante:

- L'énoncé définit un référentiel $\mathcal{R}$ fixe galiléen et un référentiel $\mathcal{R}'$ mobile dans $\mathcal{R}$. Identifier le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et en déduire les expressions des forces d'inertie.

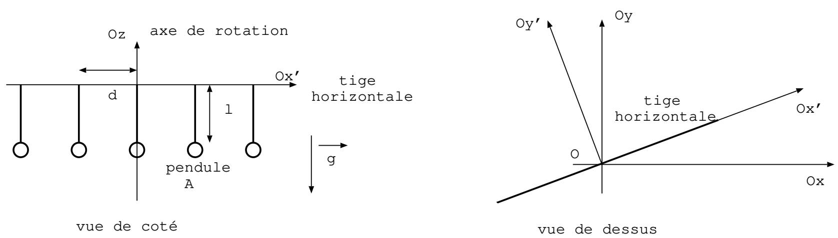
- Représenter les forces qui s'exercent sur le système dans $\mathcal{R}'$

- Exprimer la vitesse relative et l'accélération relatives de M : c'est soit une translation et on travaille en coordonnées cartésiennes avec une seule variable, soit un mouvement circulaire et on travaille en coordonnées polaires.

- Appliquer la RFD, le théorème du moment cinétique et les théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen.

I. **Pendules en rotation**

Une série de cinq pendules identiques (masse m et longueur de fil l) équidistants de d sont accrochés sur une tige horizontale.



Cette tige est en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical Oz passant par son milieu. On note $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k})$ le référentiel lié à la tige.

1. Représenter les cinq pendules lorsque l'axe est en mouvement et que les pendules sont à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$. Respecter l'ordre de grandeur des angles.

On note θ_e l'angle de déviation du pendule A à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

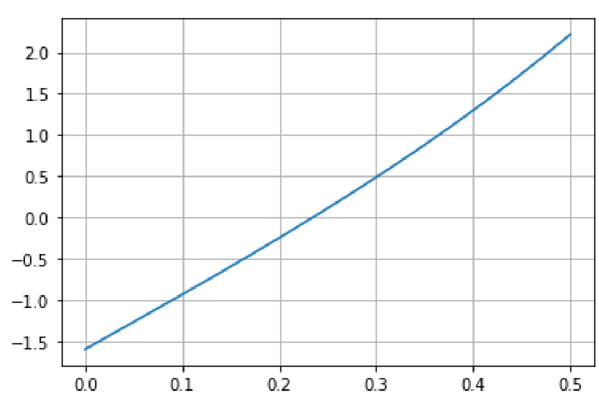
2. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$? en déduire les expressions des forces d'inertie exercées sur M.

3. Représenter le pendule A et les forces qui s'exercent sur lui dans $\mathcal{R}'$. Appliquer la RFD dans $\mathcal{R}'$ au pendule A et en déduire l'équation $(*)$ vérifiée par θ.

On cherche la valeur de θ_e solution de $(*)$ pour cela on fait une résolution sous python.

4. On donne le code suivant dont l'exécution donne la courbe ci-contre:

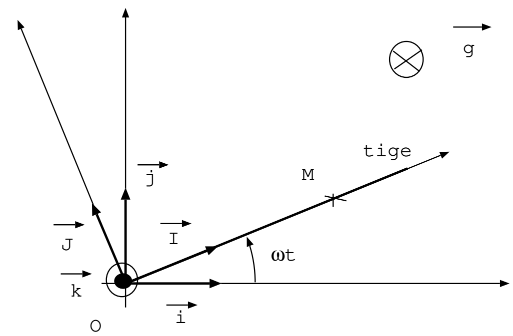
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
g,l,d,omega=9.8,0.2,0.1,....
x=np.linspace(0,0.5,500)
y=g*np.tan(x)-omega**2*(d+l*np.sin(x))
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.show()
```



Déduire de la courbe la valeur de θ_e solution de $(*)$ et calculer la valeur numérique de ω.

Réponses: $g\tan\theta_e = \omega^2(d + l\sin\theta_e)$, $\theta_e = 13,2^0$ *et* $\omega = 4\ rad.s^{-1}$

II. **Anneau sur une tige**



Une tige horizontale OT de longueur l est soudée à un axe vertical tournant à la vitesse angulaire ω constante. Un anneau de masse m est abandonné sans vitesse initiale à la distance $l/2$ de l'axe et il peut glisser sans frottement sur la tige. On étudie le mouvement de l'anneau dans le référentiel lié à la tige $\mathcal{R}'(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ ($(O, \vec{I})$ désigne la direction de la tige). On note X l'abscisse de M sur la tige.

$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le référentiel fixe lié au sol.

1. Quel est le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$? en déduire l'expression de sa vitesse relative et de son accélération relative dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

2. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ en déduire les expressions des forces d'inertie exercées sur M en fonction de m, ω, X, $\dot{X}$ dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

3. La réaction du support est de la forme $\overrightarrow{R} = R_X \overrightarrow{I} + R_Y \overrightarrow{J} + \overrightarrow{R_z} \overrightarrow{k}$. Une des composantes de la réaction est nulle, préciser laquelle en justifiant. Appliquer la RFD dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et établir différentielle vérifiée par $X(t)$. En déduire $X(t)$. Rappel: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$.

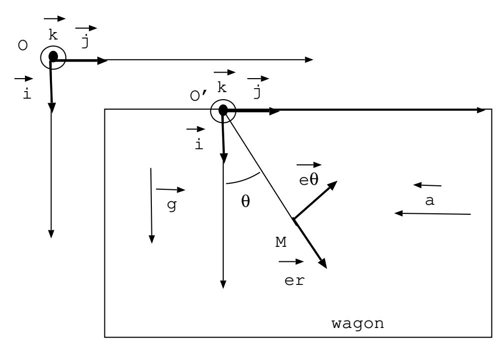
4. On note t_f la durée au bout de laquelle il atteint l'extrémité de la tige. Ecrire l'équation vérifiée par t_f.

5. Déterminer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige sur l'anneau.

6. Retrouver l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ en appliquant la conservation de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}'$.

Réponses : $\ddot{X} - \omega^2 X = 0$, $X = l/2 \cosh(\omega t)$, $\vec{R} = mg\vec{k} + ml\omega^2 \sinh(\omega t)\vec{J}$

III. **Pendule dans un train**



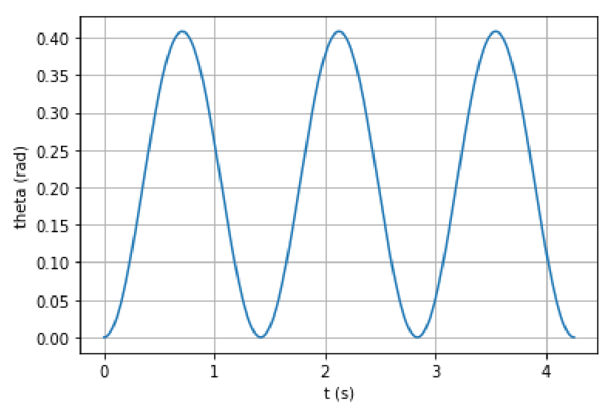
Un pendule constitué d'une masse m et d'un fil de masse négligeable et de longueur $l =$ O'M est fixé au plafond d'un train animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a} = -a\vec{j}$ (avec $a > 0$). Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié à la terre et supposé galiléen et $\mathcal{R}'(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel lié au train. On note θ l'angle entre le fil et la verticale descendante. Avec les notations de l'énoncé on a: $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{i}$

1. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}'$.

2. Dans un premier temps, le pendule est à l'équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}'$.Il fait un angle θ_e par rapport à la verticale. Déduire de l'application de la RFD l'expression de θ_e en fonction de g et a.

3. M est en mouvement dans $\mathcal{R}'$. Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M dans $\mathcal{R}'$ par rapport à O', l'équation différentielle vérifiée par θ.

4. Dans l'hypothèse des petits angles on trace la fonction $\theta(t)$. Exploiter la courbe pour trouver les valeurs numériques de l, a, $\theta(t = 0) =$ et $\dot{\theta}(t = 0)$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. A l'instant $t_1 = 3,5\ s$ l'accélération du train s'annule instantanément, donner l'allure de la fonction $\theta(t)$ pour $t > t_1$.



Réponses : 2- $\tan\theta_e = a/g$ 3- $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta - \dfrac{a}{l}\cos\theta = 0$
4- $a = 2\ m.s^{-2}$, $l = 50\ cm$

IV. **Masse apparente dans un ascenseur**

A savoir : Un pèse personne mesure la norme de la force de réaction exercée par la personne sur le pèse-personne et affiche la norme de cette réaction divisée par $g = 9,81\ m.s^{-2}$.

Un ascenseur se déplace du premier au 42 ième étage en 3 phases : il accélère uniformément avec une accélération $\overrightarrow{a} = a_0\overrightarrow{e_z}$ (Oz vertical ascendant), puis se déplace à vitesse constante, puis décélère avec un vecteur accélération $\overrightarrow{a} = -a_0\overrightarrow{e_z}$. Une masse m est posée sur un pèse personne à l'intérieur de l'ascenseur.

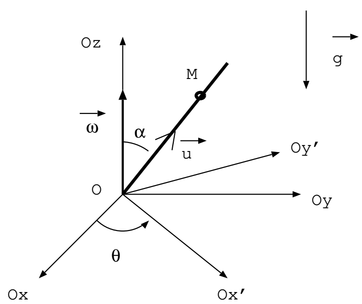
1. Qu'indique le pèse-personne dans chacune des trois phases ? (pour répondre à cette question, il faut se placer dans le référentiel lié à l'ascenseur et calculer la norme de la réaction exercée par la personne sur le pèse personne). Faire l'application numérique pour $m = 80\ kg$, $a_0 = 1\ m.s^{-2}$ et $g = 10\ m.s^{-2}$.

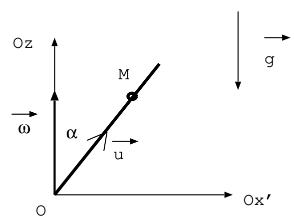
2. Qu'indiquerait le pèse-personne si on coupait les cables et que l'ascenseur tombait en chute libre ?

Réponses: phase 1: $m' = 88\ kg$, *phase 2:* $m' = 80\ kg$, *phase 3:* $m' = 72\ kg$

V. **Anneau coulissant sur une tige inclinée**

Un anneau considéré comme ponctuel positionné au point M, de masse m, peut glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α constant par rapport à la verticale. La tige tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 autour de Oz. On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire dirigé selon l'axe de la tige. On note X la distance OM. On définit le référentiel $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au sol et supposé galiléen et e référentiel $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié à la tige.





M est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

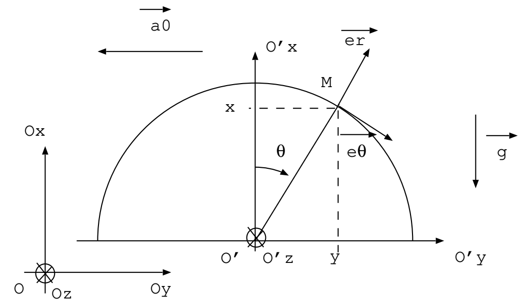
1. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. Faire un bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}'$ et les représenter sur le schéma de droite donné dans l'énoncé.

2. Déduire de la RFD appliquée à l'anneau à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$, la distance $X_e = OM$ à l'équilibre.

Réponse: $X_e = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega_0^2 \sin^2\alpha}$

VI. **Bille sur une demi-sphère accélérée**

Une bille assimilée à un point matériel de masse m, en équilibre instable au sommet d'une demi-sphère de rayon R quitte cette position sans vitesse initiale et glisse sans frottement sur la demi-sphère. Cette demi-sphère est soumise à une accélération constante $\overrightarrow{a_0} = -a_0\overrightarrow{e_y}$ avec $a_0 > 0$. On définit le référentiel $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au sol et supposé galiléen et le référentiel $\mathcal{R}'(0', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié à la demi-sphère.



1. Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et faire un bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}'$. Faire un schéma avec ces forces.

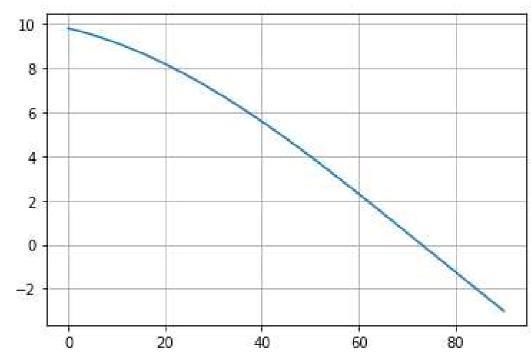
2. Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle que vous exprimerez en fonction de m, a_0 et y dans un premier temps puis en fonction de m, a_0, R et θ.

3. Montrer que dans $\mathcal{R}'$ la bille est un système conservatif et en déduire que la vitesse v de la bille dans ce référentiel s'écrit $v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta) + 2a_0R\sin\theta}$.

4. Déduire de la RFD appliquée à la bille dans $\mathcal{R}'$, l'expression de la réaction du support.

5. On obtient la courbe suivante après exécution de ce code. Utiliser cette courbe pour en déduire l'angle θ_l à partir duquel la bille décolle de la demi-sphère. Données: $a_0 = 3\ m.s^{-2}$ et $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

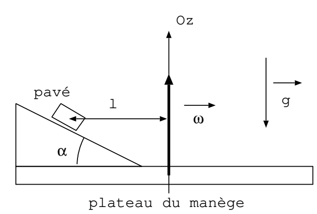
```
x=np.linspace(0,90,500)
def f(x):
——return 9.8*np.cos(x*np.pi/180)-3*np.sin(x*np.pi/180)
plt.plot(x,f(x))
plt.grid()
plt.show()
```



Réponse: $N = 3mg\cos\theta - 2mg - 3ma_0\sin\theta$

VII. **Equilibre dans un référentiel tournant**

Un plan incliné d'angle $\alpha = 30^0$ par rapport à l'horizontale est placé sur un plateau en rotation à la vitesse angulaire ω. Un pavé est posé sur le plan incliné et le coefficient de frottement statique est $f = 0,25$. Le pavé est à l'équilibre sur le plan incliné à une distance $l = 40\ cm$ de l'axe de rotation.



On définit $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'(0, \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel mobile dans lequel le pavé est à l'équilibre.

1. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen? Faire un bilan des forces exercées sur M dans $\mathcal{R}'$.

2. Déduire de la RFD appliquée à M dans $\mathcal{R}'$, les expressions des composantes R_n et R_t de la réaction du plan incliné sur le pavé (choisir pour cela deux axes de projection adaptées).

3. Déterminer la vitesse angulaire minimum qui permet d'éviter que le pavé ne glisse vers l'axe de rotation. Faire l'application numérique en rad/s et en $tour/minute$.

On rappelle les lois de Coulomb:

En présence de glissement, on a $||\overrightarrow{T}|| = f||\overrightarrow{N}||$

En absence de glissement, on a $||\overrightarrow{T}|| < f||\overrightarrow{N}||$

Réponse: $\omega > \sqrt{\dfrac{g(\sin\alpha - f_s\cos\alpha)}{l(\cos\alpha + f_s\sin\alpha)}}$