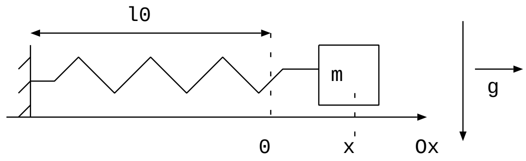
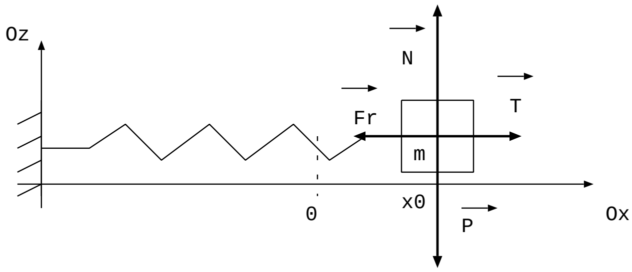
Frottement solide

Position du problème : un solide de masse m est attaché à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. La position du mobile est repéré par $x(t)$, position par rapport à sa position au repos. On écarte le mobile d'une distance x_0. On note f_s et f_d les coefficients de frottements statique et dynamique.



Question 1 : comment faut-il choisir x_0 pour que le mobile se mette en mouvement?

On considère que le mobile est à l'équilibre sous l'action de son poids, la réaction normale au support, la force de rappel et la réaction tangentielle.



RFD: $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{T}$

Projection sur Oz : $N = mg$

Projection sur Ox : $-kx_0 + T = 0$

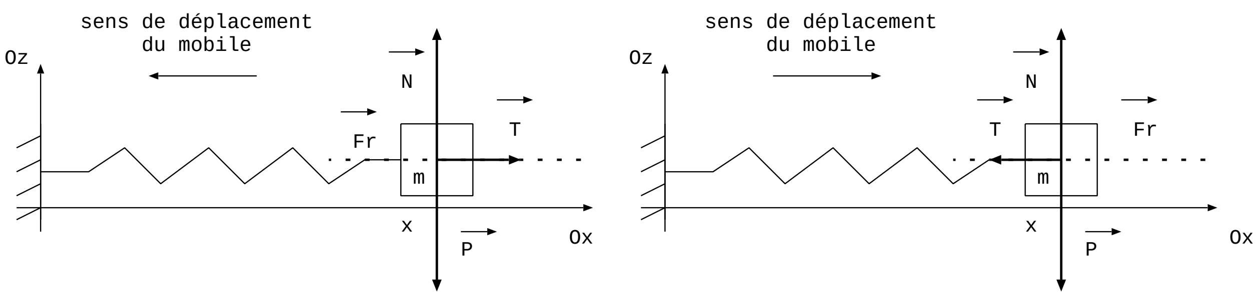
Loi de Coulomb : il y a équilibre tant que $T < f_s N$ soit pour $kx_0 < mg$ soit $x_0 < \frac{mg}{k}$.

On peut écrire la même chose pour $x_0 < 0$. Conclusion 1 : pour $-\dfrac{mg}{k} < x_0 < \dfrac{mg}{k}$, le mobile lâché sans vitesse initiale reste immobile.

Question 2 : étude des oscillations du mobile pour $x_0 > \dfrac{mg}{k}$

Le mobile subit : son poids et la réaction normale qui se compensent. Il subit également la force de rappel du ressort (selon $+OX$ lorsque le ressort est comprimé soit pour $x < 0$ et selon $-0x$ lorsque le ressort est dilaté soit pour $x > 0$) et la réaction tangentielle opposée à la vitesse du mobile.

On distingue donc deux phases:



- les phases où x diminue : la vitesse est selon $-Ox$ et la réaction tangentielle est selon $+Ox$

RFD: $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{T}$

Projection sur Oz : $0 = +N - mg$

Projection sur Ox : $m\ddot{x} = -kx + T$

Loi de Coulomb : $T = f_d N = f_d mg$

soit $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = f_d g$

oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

- les phases où x augmente : la vitesse est selon $+Ox$ et la réaction tangentielle est selon $-Ox$.

RFD: $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{T}$

Projection sur Oz : $0 = +N - mg$

Projection sur Ox : $m\ddot{x} = -kx - T$

Loi de Coulomb : $T = f_d N = f_d mg$

soit $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = -f_d g$

oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Dans les deux phases, la pulsation propre et la période propre est la meme donc le mouvement est bien pseudo-périodique, soit la période est toujours la meme mais l'amplitude des oscillations diminue (en fait c'est ce qui caractérise un oscillateur harmonique : la pulsation et la période ne dépendent par de l'amplitude des oscillations!).

On note x_0, x_1, x_2, x_3... les valeurs de x où le mobile s'arrête et fait demi-tour (ce sont les amplitudes maximales d'oscillations). Ici $x_0 > 0$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 < 0$,... Le mobile s'arrête d'osciller pour x_i compris entre $-\frac{mg}{k}$ et $+\frac{mg}{k}$ (d'après l'étude de l'équilibre).

On cherche la relation entre $x_1 < 0$ et $x_0 > 0$ (le mobile a alors fait un aller).

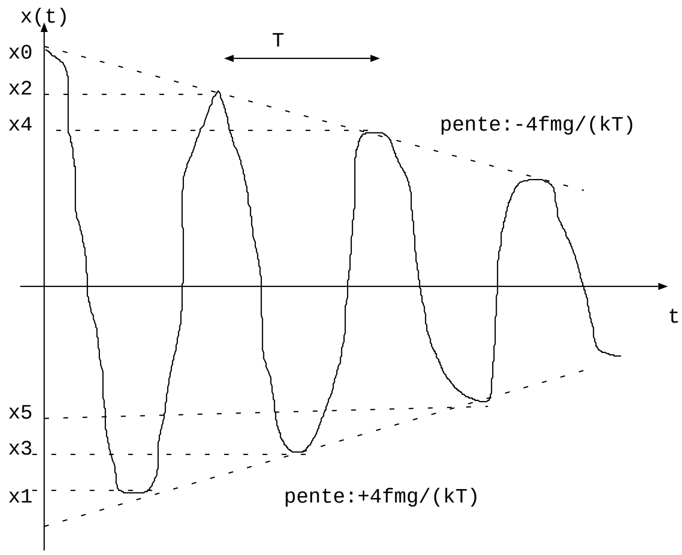
On a $\Delta E_m = W^T$ (le système n'est pas conservatif, son énergie mécanique diminue au cours du temps à cause de la force T): l'énergie mécanique est ici la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ (l'énergie potentielle de pesanteur n'intervient pas, elle est constante car le mouvement est horizontal donc ici le poids ne travaille pas!).

On écrit le travail de T sur un aller de $x_0 > 0$ à $x_1 < 0$: $W = -T(x_0 - x_1) = -f_d mg(x_0 - x_1) < 0$:travail résistant.

On écrit la variation d'énergie mécanique (en x_0 et en x_1, la vitesse est nulle): $\Delta E_m = \dfrac{1}{2}kx_1^2 - \dfrac{1}{2}kx_0^2$

On a donc $\Delta E_m = \dfrac{1}{2}kx_1^2 - \dfrac{1}{2}kx_0^2 = -f_d mg(x_0 - x_1)$ soit $\dfrac{1}{2}k(x_1 - x_0)((x_1 + x_0) = -f_d mg(x_1 - x_0)$ soit en simplifiant $x_1 = x_0 - \dfrac{2f_d mg}{k}$.

On peut montrer ainsi de suite que $x_2 = x_0 + \dfrac{2f_d mg}{k}$.



Les maxima d'amplitude sont donc répartis sur des droites (on trouve la pente des ces droites en faisant $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\frac{4f_d mg}{k}}{T}$).