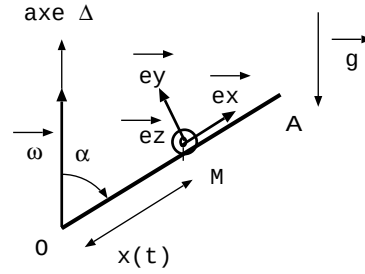


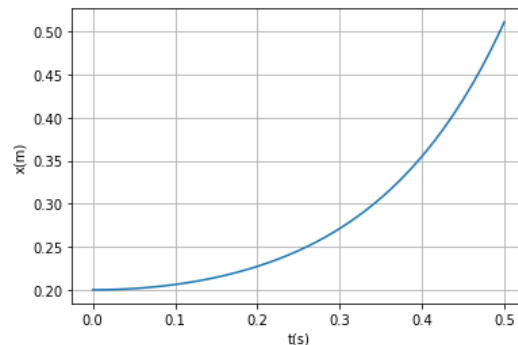
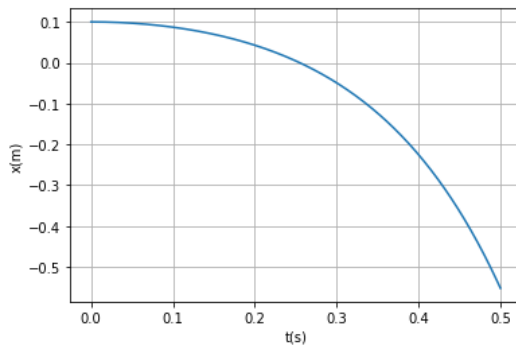
I. Tige en rotation

Une tige OA de longueur l se trouve dans le plan vertical et fait un angle constant α constant par rapport à l'axe vertical Δ et tourne autour de l'axe cet axe à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$. Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance x_0 du point O et se déplace sans frottement. On repère la position de l'anneau par la distance $x(t) = OM$. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est galiléen. On utilise la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour étudier le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$, référentiel lié à la tige.



1. Préciser la nature du mouvement de l'anneau dans $\mathcal{R}'$ et exprimer sa vitesse relative en fonction des données.
2. Dédurre de la RFD appliquée à l'anneau dans $\mathcal{R}'$, la position d'équilibre x_e de l'anneau.
3. Dédurre d'un raisonnement énergétique, l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et commenter.
4. On fait une résolution numérique en utilisant la méthode d'Euler.
 - 4.a. Rappeler l'expression de $v(t + dt)$ en fonction de $v(t)$, $a(t)$ et dt pour dt petit.
 - 4.b. Rappeler l'expression de $x(t + dt)$ en fonction de $x(t)$, $v(t)$ et dt pour dt petit.
 - 4.c. On donne le code suivant et les courbes résultants de son exécution:

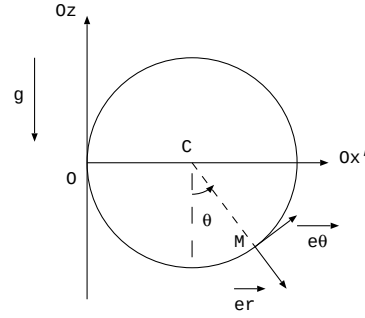
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
omega,g,alpha,tau,N=8.,9.8,50*np.pi/180,0.001,.....
lt,lx,lv=[0],[.....],[.....] # lt, lx et lv sont respectivement les listes des temps, positions OM et vitesse
for i in range(N):
    —lt.append(lt[i]+tau)
    —c=.....
    —lv.append(lv[i]+c*tau)
    —lx.append(.....)
plt.plot(lt,lx)
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('x(m)') plt.grid()
plt.show()
```



Calculer numériquement valeur de x_e (position d'équilibre) à l'aide des données du code. Compléter le code et commenter les courbes (comparer l'évolution de l'anneau au cours du temps et comparer la valeur numérique de x_0 à la valeur de x_e). Dédurre des courbes la stabilité de la position d'équilibre.

II. Cercle tournant

Une cercle de centre C et de rayon a , située dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz , d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Un anneau M de masse m , assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait OM avec la verticale descendante passant par O . L'étude est menée dans le référentiel $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$ lié au cercle. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposé galiléen.



1. Montrer que le pendule constitue un système conservatif dans $\mathcal{R}'$ et exprimer son énergie mécanique en fonction de m, g, a, ω et θ .

2. Donner l'expression approchée de cette énergie pour les petits angles à savoir pour $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin \theta \approx \theta$.

En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ .

3. Montrer qu'il existe une position d'équilibre uniquement pour $\omega < \omega_0$. Exprimer ω_0 en fonction de g et de a .

4. On propose une résolution numérique de cette équation par la méthode d'Euler.

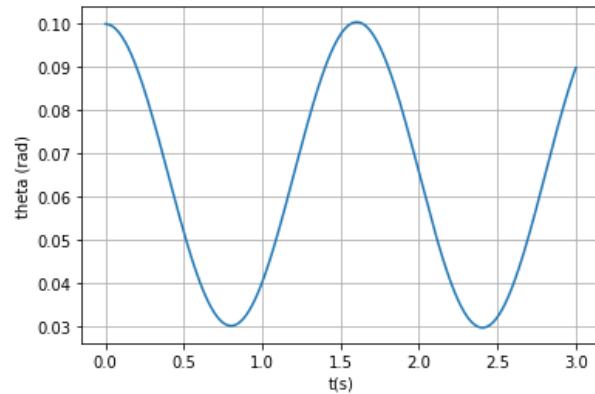
4.a. Donner l'expression de $\theta(t + dt)$ en fonction de $\theta(t)$, dt et $\dot{\theta}(t)$ pour dt petit.

4.b. Donner l'expression de $\dot{\theta}(t + dt)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$, dt et $\ddot{\theta}(t)$ pour dt petit.

4.c. On donne le code suivant et le résultat de son exécution pour résoudre cette équation en utilisant la méthode d'Euler:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a,omega,g,tau,N=0.6,1,9.8,....., 3000
lt,ltheta,ldtheta=[0],[...],[...] # lt, ltheta et ldtheta
sont les listes contenant les valeurs du temps, de  $\theta(t)$ 
et de  $\dot{\theta}(t)$ 
for i in range(N):
    —lt.append(lt[i]+tau)
    —c=.....
    —ldtheta.append(ldtheta[i]+c*tau)
    —ltheta.append(.....)
plt.plot(lt,ltheta)
plt.xlabel('t(s)')
```

```
plt.ylabel('theta (rad)')
plt.grid()
plt.show()
```



Déduire de la courbe la valeur numérique de θ_e (la position d'équilibre) et la période T_0 des oscillations. Comparer ω et ω_0 . Est-ce cohérent d'observer des oscillations? Déduire de l'équation différentielle, les valeurs théoriques de θ_e et de T_0 et vérifier la cohérence avec les valeurs lues sur la courbe.