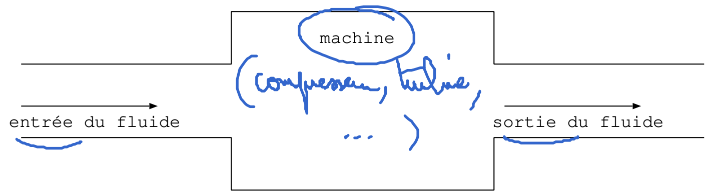
Démonstration du premier principe industriel

Modélisation du système fluide en écoulement dans la machine:



Notations:

h représente l'enthalpie massique ($[h] = J.kg^{-1}$)

v représente le volume massique ($[v] = m^3.kg^{-1}$)

$v = \frac{1}{\rho}$

u représente l'énergie interne massique ($[u] = J.kg^{-1}$)

c est la vitesse du fluide

z est l'altitude du fluide (axe Oz vertical ascendant)

D_m est le débit massique ($[D_m] = kg.s^{-1}$): c'est la masse de fluide qui traverse la section de la canalisation par unité de temps

$D_m \times dt$: masse qui traverse une section de la canalisation entre t et $t+dt$

Le fluide échange avec la machine:

- Le transfert thermique massique noté q ou la puissance thermique notée $\mathcal{P}_{th}$
- Le travail utile massique noté w_u ou la puissance utile notée $\mathcal{P}_u$ (le travail utile est lié aux pièces mobiles de la machine: piston ou hélice).

q et w_u sont en $J.kg^{-1}$

$\mathcal{P}_{th}$ et $\mathcal{P}_u$ sont en $W = J.s^{-1}$

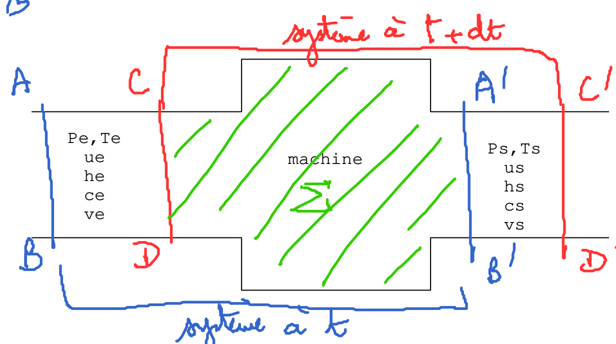
D_m est en $kg.s^{-1}$

On a les relations: $\boxed{\mathcal{P}_{th} = D_m \times q}$ et $\boxed{\mathcal{P}_u = D_m \times w_u}$

Le système étudié:

On définit un système fermé et mobile compris entre:

- AB et $A'B'$ à l'instant t
- CD et $C'D'$ à l'instant $t + dt$



Les systèmes $ABA'B'$ et $CDC'D'$ ont en commun le volume $CDA'B'$ porte le nom de volume de contrôle et est noté Σ. On se place en régime stationnaire soit $E_{m,\Sigma}(t) = E_{m,\Sigma}(t + dt)$, $U_\Sigma(t) = U_\Sigma(t + dt)$...

Le système $ABA'B'$ est constitué de Σ ajouté de $ABCD$ à l'entrée de la machine

Le système $CDC'D'$ est constitué de Σ " $A'B'C'D'$ à la sortie de la machine

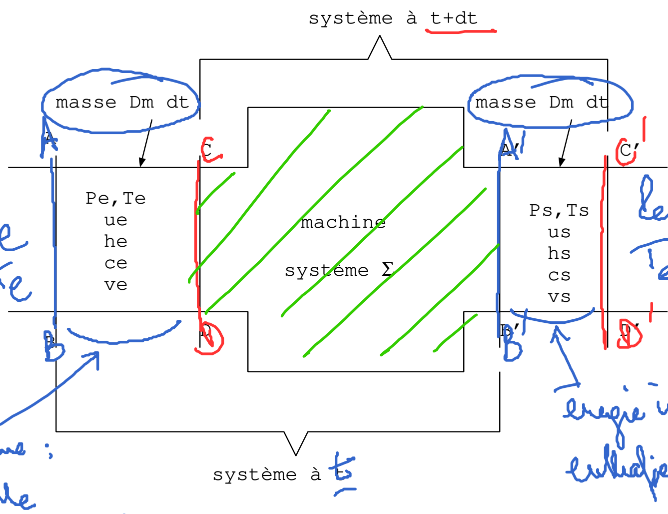
Conservation de la masse: $m_{ABA'B'} = m_{CDC'D'}$

régime stationnaire

$$\cancel{m_\Sigma(t)} + m_{ABCD} = \cancel{m_\Sigma(t+dt)} + m_{A'B'C'D'}$$

$$\boxed{m_{ABCD} = m_{A'B'C'D'} = D_m \times dt}$$

Conservation de l'énergie:



on applique le 1er principe à ce système fermé :

$$dU + dE_m = \delta W + \delta Q$$

$P_{ext} = P_e$, $T_{ext} = T_e$

$P_{ext} = P_s$, $T_{ext} = T_s$

énergie interne : $D_m dt \times u_e$

enthalpie : $D_m dt \times h_e$

énergie interne : $D_m dt \times u_s$

enthalpie : $D_m dt \times h_s$

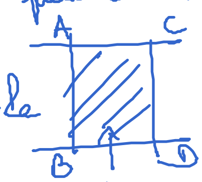
$$dU = U_{CDC'D'}(t+dt) - U_{ABA'B'}(t) = \left[\cancel{U_\Sigma(t+dt)} + U_{A'B'C'D'}\right] - \left[\cancel{U_\Sigma(t)} + U_{ABCD}\right] = D_m dt \times u_s - D_m dt \times u_e$$

$$dE_m = E_{m\,CDC'D'}(t+dt) - E_{m\,ABA'B'}(t) = \left[\cancel{E_{m\Sigma}(t+dt)} + E_{m\,A'B'C'D'}\right] - \left[\cancel{E_{m\Sigma}(t)} + E_{m\,ABCD}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2} D_m dt\, c_s^2 + D_m dt\, g z_s\right) - \left(\frac{1}{2} D_m dt\, c_e^2 + D_m dt\, g z_e\right)$$

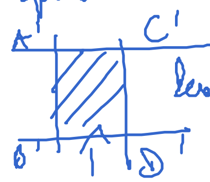
⚠ $\delta W = -P_{ext}\, dV$

$$\delta W = \underbrace{\mathcal{P}_u\, dt}_{\text{travail utile échangé avec la machine}} - \underbrace{P_e\left(0 - D_m dt\, v_e\right)}_{\text{travail des forces de pression à l'entrée}} - \underbrace{P_s\left(D_m dt\, v_s - 0\right)}_{\text{travail des forces de pression à la sortie}} = dt\left[\mathcal{P}_u + D_m\left(P_e v_e - P_s v_s\right)\right]$$



$P_{ext} = P_e$

volume : $D_m dt \times v_e$ à t



$P_{ext} = P_s$

volume : $D_m dt \times v_s$ à $t+dt$

$$\delta Q = \mathcal{P}_{th}\, dt$$

d'où $D_m \cancel{dt}\left(u_s - u_e\right) + D_m \cancel{dt}\left[\frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g z_s - g z_e\right] = \cancel{dt}\left[\mathcal{P}_u + D_m\left(P_e v_e - P_s v_s\right) + \mathcal{P}_{th}\right]$

$$D_m\left[\underbrace{u_s + P_s v_s}_{h_s} - \left(\underbrace{u_e + P_e v_e}_{h_e}\right) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g z_s - g z_e\right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

1er principe industriel (en Watt)

$$\boxed{D_m\left[\underbrace{h_s - h_e}_{\Delta h} + \underbrace{\frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g z_s - g z_e}_{\Delta e_m}\right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}}$$

$\mathcal{P}_u = D_m w_u$

$\mathcal{P}_{th} = D_m q$

1er principe industriel (en $J.kg^{-1}$)

$$\boxed{\underbrace{h_s - h_e}_{\Delta h} + \underbrace{\frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g z_s - g z_e}_{\Delta e_m} = w_u + q}$$

Expression de la variation d'enthalpie:

Pour un liquide: $\boxed{\Delta h_{1-2} = c(T_2 - T_1)}$ où c désigne la capacité thermique massique en $J.K^{-1}.kg^{-1}$

Pour un gaz: $\boxed{\Delta h_{1-2} = c_p(T_2 - T_1)}$ où c_p désigne la capacité thermique massique à pression constante en $J.K^{-1}.kg^{-1}$ (remarque: pour un liquide on ne précise pas que l'on utilise la capacité à pression constante car le pression d'un liquide est toujours constante)

Cas particulier du GP: $\boxed{c_p = \dfrac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}}$ où M est la masse molaire

Remarque:

Pour un système fermé (un système dans un récipient fermé sans entrée ni sortie), le premier principe s'écrit:

$$\boxed{\Delta U + \Delta E_m = W + Q}$$

Pour un système en écoulement (soit une machine avec une entrée et une sortie de fluide), le premier principe industriel s'écrit:

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_m = w_u + q \text{ ou } D_m(\Delta h + \Delta e_m) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}}$$

ΔU est remplacé par Δh

W est remplacé par w_u

Le travail (ou la puissance) utile est le travail (ou la puissance mécanique) échangé uniquement avec les pièces mobiles de la machine.

Dans le premier principe industriel, la variation d'énergie interne est remplacée par la variation d'enthalpie car la variation d'enthalpie contient la variation d'énergie interne et les travaux de transvasement: soit les travaux des forces de pression à l'entrée et à la sortie du fluide dans la machine.

$$W = \underbrace{W_e + W_s}_{\text{travail des forces de pression à l'entrée et à la sortie}} + \underbrace{W_u}_{\text{machine}}$$

$$\Delta U - W_s - W_e = \Delta H$$