

Fonction de transfert d'un filtre

I. Fonction de transfert

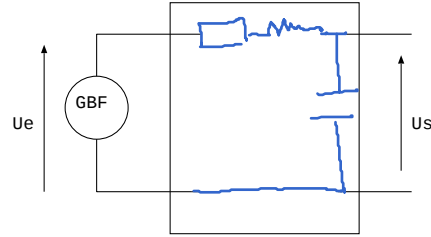
Le filtre est alimenté par une tension sinusoïdale de la forme $U_e(t) = E \cos(\omega t)$ où $\omega = 2\pi f$.

La tension de sortie s'écrit: $U_s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$

où S est l'amplitude de $U_s(t)$

ϕ est le déphasage de U_s à U_e

L'entrée et la sortie ont la même fréquence... mais n'ont pas les mêmes amplitudes... et elles ne sont pas en phase.



Les valeurs de S et de ϕ dépendent de la fréquence, on trouve leur expression en utilisant la fonction de transfert définie par: $\underline{H}(f) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$

On prend le module de la fonction de transfert: $G(f) = \left| \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \right| = \frac{S}{E}$: c'est le gain, il permet de trouver l'amplitude de la tension de sortie en effet $S = G(f) \cdot E$

On prend l'argument de la fonction de transfert: $\phi(f) = \arg(\underline{H}(f))$: c'est le déphasage de $U_s(t)$ par rapport à $U_e(t)$.

Pour $\phi > 0$: $U_s(t)$ est en avance sur $U_e(t)$ (soit $U_s(t)$ atteint son maximum avant U_e). Pour $\phi < 0$: $U_s(t)$ est en retard sur $U_e(t)$ (U_s atteint son maximum après U_e).

La tension de sortie s'écrit alors: $U_s(t) = E \cdot G(f) \cos(\omega t + \phi(f))$

avec $\omega = 2\pi f$

Remarque: comment s'écrit la tension de sortie d'un filtre alimenté par un signal de la forme:

$$U_e(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_2 \cos(2\pi f_2 t)?$$

on sait :

$$\begin{cases} e(t) = E \cos(2\pi f t) \\ s(t) = E \times G(f) \cos(2\pi f t + \phi(f)) \end{cases}$$

$$U_{e0}(t) = U_0 \quad f = 0 \text{ Hz}$$

$$U_{s0}(t) = U_0 \times G(0 \text{ Hz})$$

$$U_{e1}(t) = U_1 \cos(2\pi f_1 t) \quad \text{fréquence } f_1$$

$$U_{s1}(t) = U_1 \times G(f_1) \cos(2\pi f_1 t + \phi(f_1))$$

$$U_{e2}(t) = U_2 \cos(2\pi f_2 t) \quad \text{fréquence } f_2$$

$$U_{s2}(t) = U_2 \times G(f_2) \cos(2\pi f_2 t + \phi(f_2))$$

Le filtre est linéaire : $U_s(t) = U_{s0}(t) + U_{s1}(t) + U_{s2}(t)$

à savoir faire

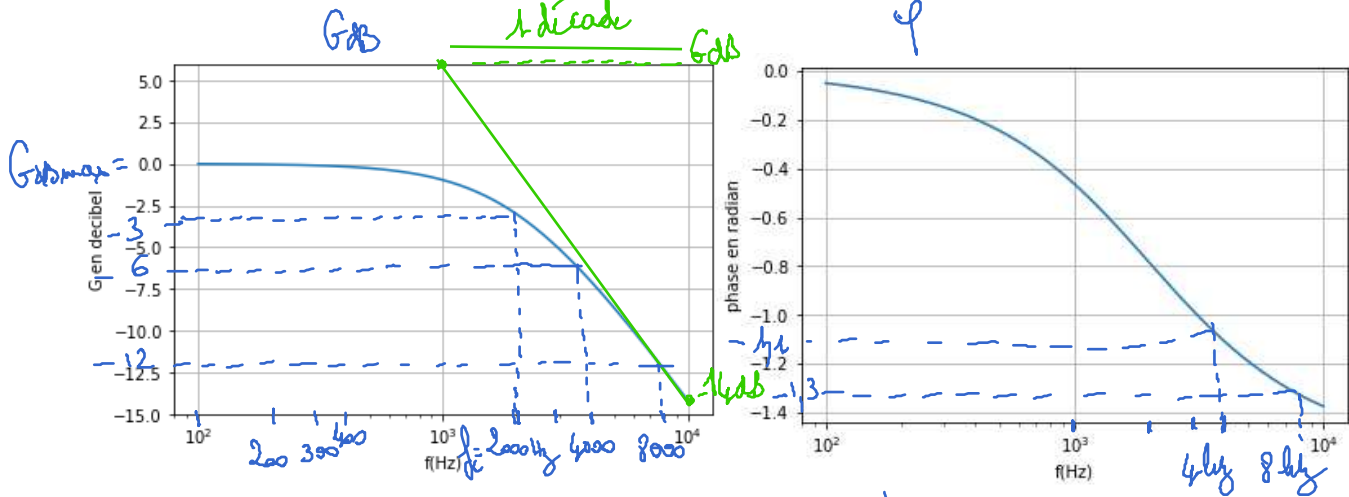
II. Diagrammes de Bode: lecture et utilisation

Le diagramme de Bode en gain est la courbe donnant $G_{dB} = 20 \log G = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \frac{S}{E}$ en fonction de $\log f$.

Le diagramme de Bode en phase est la courbe donnant ϕ en fonction de $\log f$.

1. Exemple 1

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase d'un filtre:



Préciser la nature de ce filtre: ce filtre laisse passer les BF c'est un filtre passe-bas
car les HF

Lire sa fréquence de coupure:

$$G_{dB}(f_c) = G_{dB_{max}} - 3 \text{ dB}$$

$$\text{on } G(f_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \quad \left(20 \log G(f_c) = 20 \log \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = 20 \log G_{max} - 20 \log \sqrt{2} = G_{dB_{max}} - 3 \text{ dB} \right)$$

Lire la pente de l'asymptote à haute fréquence:

-20 dB/décade

♥ l'unité courante des pentes des asymptotes est le dB/décade où une décade est un intervalle de fréquence de la forme $[f, 10f]$.

Soit la tension d'entrée $U_e(t) = 4 + 5 \cos(2\pi 4000t) + 3 \cos(2\pi 8000t)$. Tracer son spectre en amplitude et déterminer la tension de sortie du filtre.

$$\begin{aligned} U_{e0}(t) &= 4 & f &= 0 \text{ Hz} & G_{dB}(0 \text{ Hz}) &= 0 \text{ dB} & U_{s0}(t) &= 4 \times 10^0 = 4 \text{ V} \\ U_{e1}(t) &= 5 \cos(2\pi 4000t) & f_1 &= 4 \text{ kHz} & G_{dB}(4 \text{ kHz}) &= -6 \text{ dB} & U_{s1}(t) &= 5 \times 10^{-6/20} \cos(2\pi 4000t - 1,1) \\ & & & & \phi(4 \text{ kHz}) &= -1,1 \text{ rad} \\ U_{e2}(t) &= 3 \cos(2\pi 8000t) & f_2 &= 8 \text{ kHz} & G_{dB}(8 \text{ kHz}) &= -12 \text{ dB} & U_{s2}(t) &= 3 \times 10^{-12/20} \cos(2\pi 8000t - 1,3) \\ & & & & \phi(8 \text{ kHz}) &= -1,3 \text{ rad} \end{aligned}$$

on sait: $e(t) = E \cos(2\pi f t)$

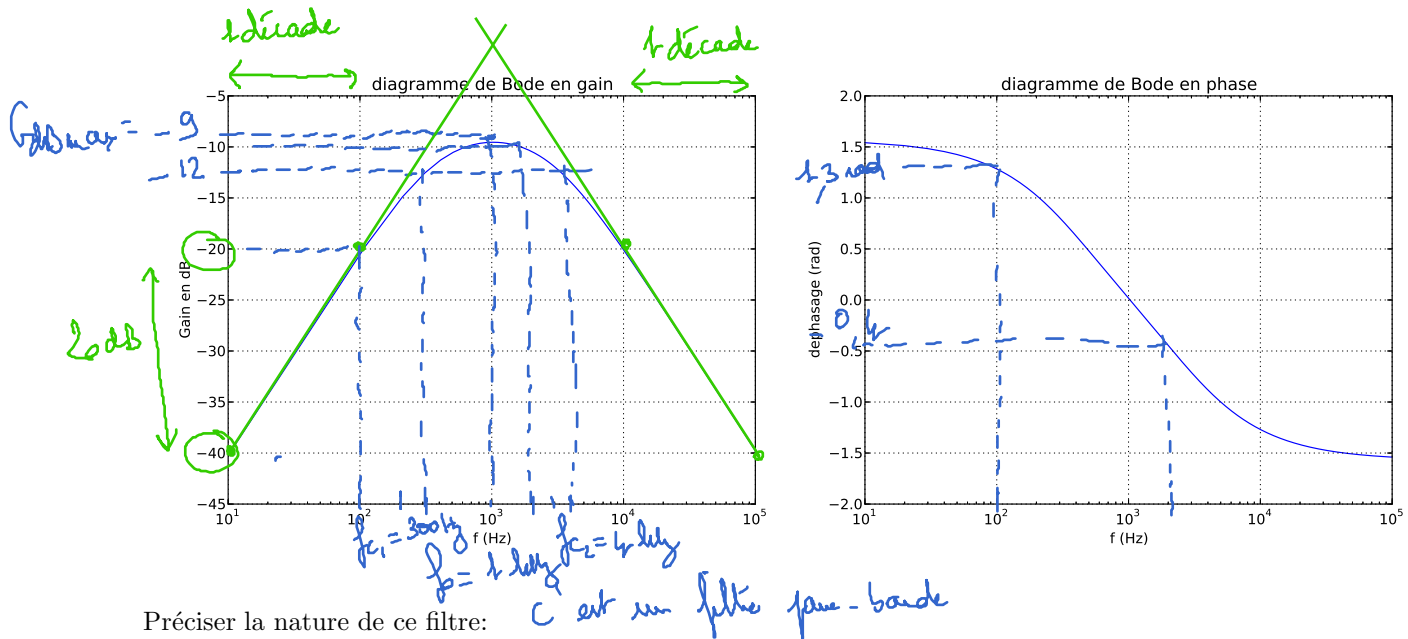
$$s(t) = E G(f) \cos(2\pi f t + \phi(f))$$

$$\text{on } G_{dB} = 20 \log G \Rightarrow G = 10^{G_{dB}/20}$$

Le filtre est linéaire: $U_s(t) = U_{s0}(t) + U_{s1}(t) + U_{s2}(t)$

2. Exemple 2

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase d'un filtre:



Préciser la nature de ce filtre:

Lire la fréquence de résonance f_0 :

Lire ses fréquences de coupure :

En déduire le facteur de qualité:

Lire les pentes des asymptotes à basse et haute fréquence:

BF : +20 dB/décade

HF : -20 dB/décade

Déterminer la tension de sortie de la tension d'entrée $U_e(t) = 3 + 4 \cos(200\pi t) + 6 \cos(4000\pi t)$.

on sait : $e(t) = E \cos(2\pi f t)$

$s(t) = E G(f) \cos(2\pi f t + \varphi(f))$

$U_{e0}(t) = 3$

$f = 0 \text{ Hz}$

$G_{dB}(0 \text{ Hz}) = -\infty$

$U_{s0}(t) = 3 \times 0 = 0 \text{ V}$

$U_{e1}(t) = 4 \cos(200\pi t)$

$f = 100 \text{ Hz}$

$G_{dB}(100 \text{ Hz}) = -10 \text{ dB}$

$\varphi(100 \text{ Hz}) = 1,3 \text{ rad}$

$U_{s1}(t) = 4 \times 10^{-10/20} \cos(200\pi t + 1,3)$

$U_{e2}(t) = 6 \cos(4000\pi t)$

$f = 2 \text{ kHz}$

$G_{dB}(2 \text{ kHz}) = -20 \text{ dB}$

$\varphi(2 \text{ kHz}) = -0,4 \text{ rad}$

$U_{s2}(t) = 6 \times 10^{-20/20} \cos(4000\pi t - 0,4)$

$G_{dB} = 20 \lg G \Rightarrow G = 10^{G_{dB}/20}$

Le filtre est linéaire : $U_s(t) = U_{s0}(t) + U_{s1}(t) + U_{s2}(t)$

Parmi les fonctions de transfert suivantes quelle est celle qui correspond à ce filtre?

filtre passe-bande

$$H_1 = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

$$H_2 = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

c'est lui

$$H_3 = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + jQ\frac{f}{f_0}}$$

lg: $H_2(f=f_0) = H_0$
 $G_{dB} = -9 = 20 \lg H_0$
 $H_0 = 10^{-9/20}$

$|H_1| \xrightarrow{f \rightarrow 0} H_0$

$|H_2| \xrightarrow{f \rightarrow 0} 0$

$|H_3| \xrightarrow{f \rightarrow 0} H_0$

$|H_1| \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$

$|H_2| \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$

$|H_3| \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$

passe-bas (ordre 1)

passe-bande

passe-bas (ordre 2)

Déterminer l'expression approchée de la fonction de transfert à BF et HF et en déduire, en notation réelle, l'expression de $U_s(t)$ en fonction de $U_e(t)$. Quelle opération réalise le filtre à BF et à HF? Choisir parmi une sinusoïde, un créneau ou un triangle, la forme du signal d'entrée à envoyer sur le filtre pour mettre en évidence cette opération. **Attention de ne pas confondre limite et expression approchée.** La limite est la valeur numérique vers laquelle tend la fonction de transfert, l'expression approchée est l'expression littérale que l'on trouve en ne gardant qu'un seul terme, à savoir le terme le plus grand, au numérateur et au dénominateur.

BF: $H_2 = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

on garde au dénominateur le seul terme, le terme le + grand en valeur absolue

$H_2 \approx \frac{H_0}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} \approx \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \frac{U_e}{U_e} \Rightarrow \underline{U_s} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \underline{U_e}$

multiplier par $j\omega$, se traduit à dériver / au temps

en notation réelle: $U_s = \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{dU_e}{dt}$ filtre dérivateur

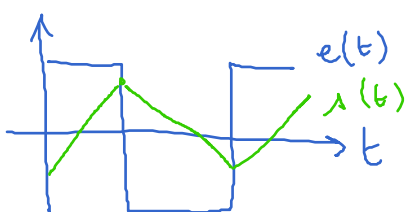
HF

$H_2 = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

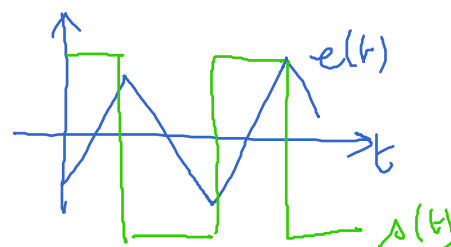
diviser par $j\omega$, se traduit à intégrer / au temps

$H_2 = \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0\omega_0}{Qj\omega} = \frac{U_s}{U_e} \Rightarrow \underline{U_s} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{U_e}{j\omega}$

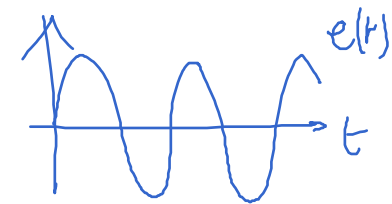
en notation réelle: $U_s = \frac{H_0\omega_0}{Q} \int U_e(t) dt$ = filtre intégrateur



filtre intégrateur



filtre dérivateur

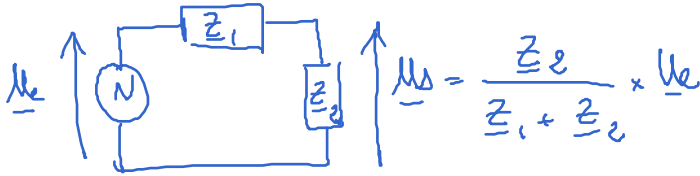


on trouve une sinusoïde en quadrature, la phase pour les 2 filtres

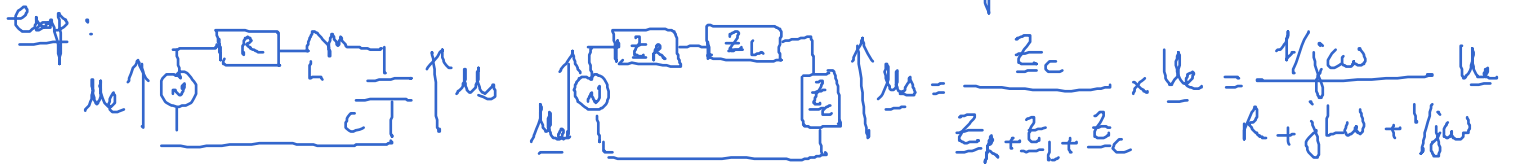
III. Déterminer une fonction de transfert

situation 1 :

d'après le diviseur de tension :



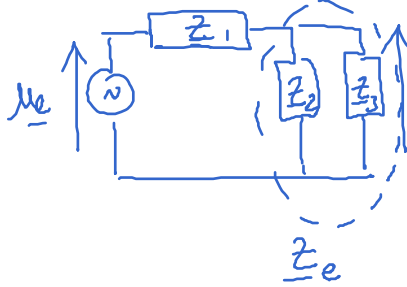
d'après le diviseur de tension :



$$\underline{U}_o = \frac{1}{j\omega R - \omega^2 L + 1} \underline{U}_e \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{U}_o}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 - \omega^2 L + j\omega R}$$

situation 2

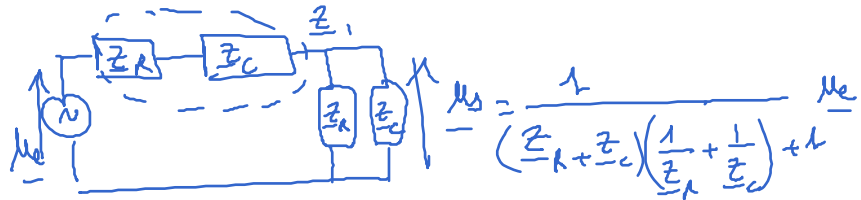
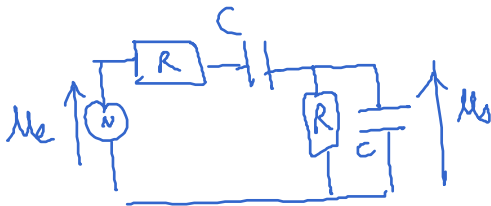
d'après le diviseur de tension :



avec $\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$

$$\underline{U}_o = \frac{1}{\underline{Z}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right) + 1} \underline{U}_e = \frac{1}{\underline{Z}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) + 1} \underline{U}_e \quad \text{astuce}$$

ex :



$$\underline{U}_o = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{j\omega} \right) \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right) + 1} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + 1 + j\omega R + \frac{1}{j\omega R} + 1} \underline{U}_e$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_o}{\underline{U}_e} = \frac{1}{3 + j\omega R + \frac{1}{j\omega R}}$$

.