

Chapitre outils : les opérateurs

Dans tout ce cours, on définit $V(M)$: un champ scalaire et $\vec{A}(M)$: un champ vectoriel.

Exemples de champ scalaire:

Exemples de champ vectoriel:

I. Les quatre opérateurs fondamentaux

1. **Le gradient** : on note $\overrightarrow{\text{grad}}V$ et on lit gradient V.

Cet opérateur s'applique à un champ et le résultat est un

En coordonnées cartésiennes, **et en coordonnées cartésiennes uniquement**, on définit l'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$ par:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{Soit } \overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V =$$

Exemple : $V(x, y, z) = 5x^2y + x \ln z$

Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM}$ en coordonnées cartésiennes:

Gradient et lignes de iso-V:

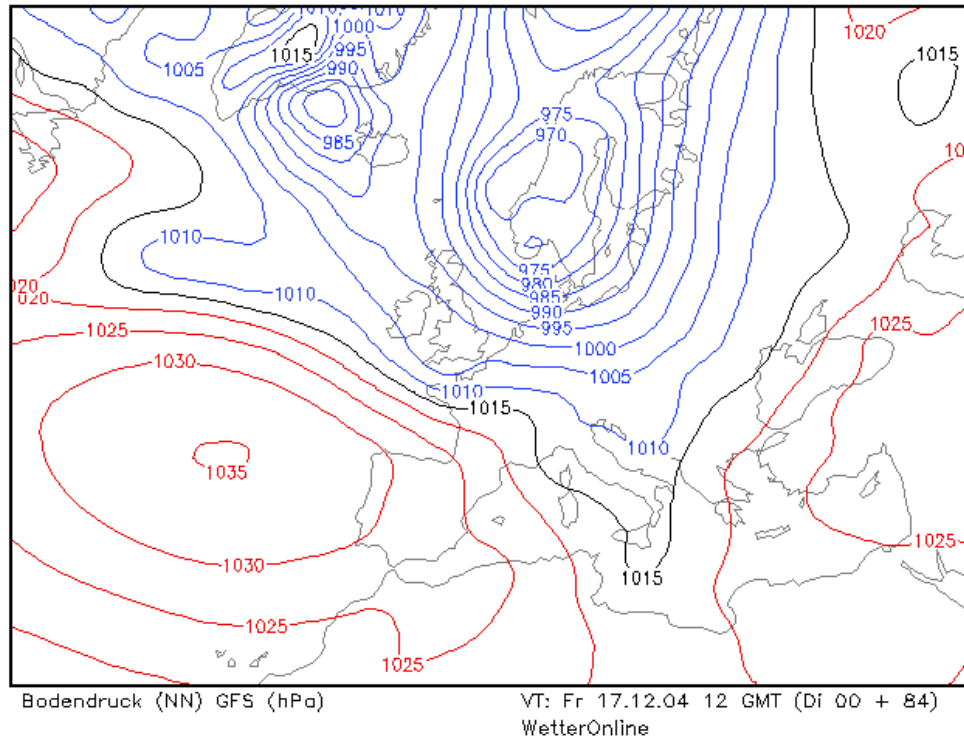
En un point d'une ligne iso-V, le vecteur gradient est:

-

-

-

Gradient et lignes isobares :

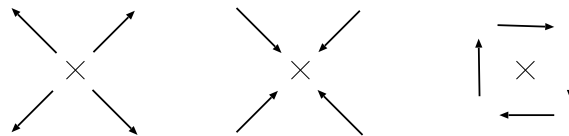


Donnée: la distance à vol d'oiseau entre Brest et Marseille est 1000 *km*

2. La divergence : on note $\text{div } \vec{A}$ et on lit divergence $\vec{A}$.

Cet opérateur s'applique à un champ et le résultat est un champ

Signification physique:



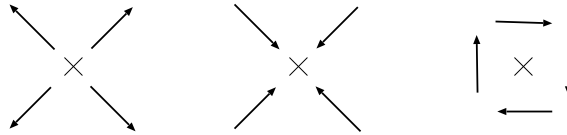
Expression en coordonnées cartésiennes: $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} =$

Exemple : $\vec{A} = 3x^2y\vec{e}_x + 5zx^2\vec{e}_y + 4x \ln z\vec{e}_z$

3. Le rotationnel : on note $\vec{\text{rot}}\vec{A}$ et on lit rotationnel $\vec{A}$.

Cet opérateur s'applique à un champ et le résultat est un champ

Signification physique : le rotationnel traduit la rotation du champ de vecteurs autour d'un point:



Expression en coordonnées cartésiennes: $\vec{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} =$

4. Le Laplacien : on note ΔV (appliqué à un champ scalaire) et $\Delta\vec{A}$ (appliqué à un champ de vecteurs).

Appliqué à un champ scalaire : il est défini par $\Delta V = \text{div}(\vec{\text{grad}}V)$ soit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \vec{\nabla}^2 V =$$

Exemple : calculer le Laplacien de $V(x, y, z) = V_0x^2y^3 + V_1 \ln z$.

Appliqué à un champ de vecteurs : il est défini par $\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$

II. Composition d'opérateurs

$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = 0$: la divergence d'un rotationnel est toujours nul.

$\text{div}(\vec{\text{grad}}V) = \Delta V$: la divergence d'un gradient d'un champ scalaire est égal au laplacien scalaire de ce champ.

$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}V) = \vec{0}$: le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

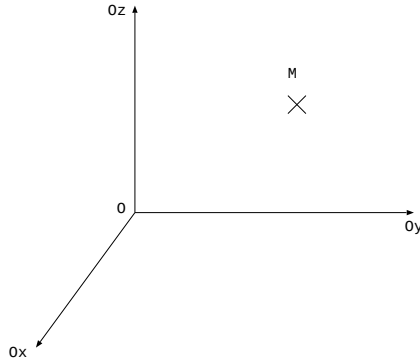
$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$: le rotationnel du rotationnel est égal au gradient de la divergence retranché du laplacien.

III. Autres systèmes de coordonnées

En coordonnées cylindriques et sphériques, les expressions des opérateurs ne sont pas à connaître, elles sont à savoir utiliser.

Attention: il n'existe pas de vecteur $\vec{\nabla}$ ni en coordonnées cylindriques, ni en coordonnées sphériques.

1. Coordonnées cylindriques



vecteur position: $\overrightarrow{OM} =$

Quand r varie, M se déplace de

Quand z varie, M se déplace de

Quand θ varie, M se déplace de

vecteur déplacement élémentaire :

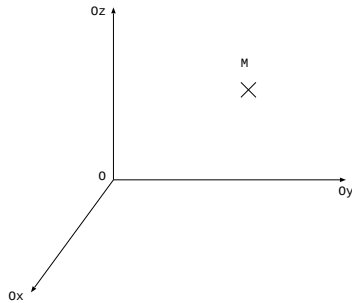
$$d\overrightarrow{OM} =$$

$$\text{gradient : } \overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{divergence : } \text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

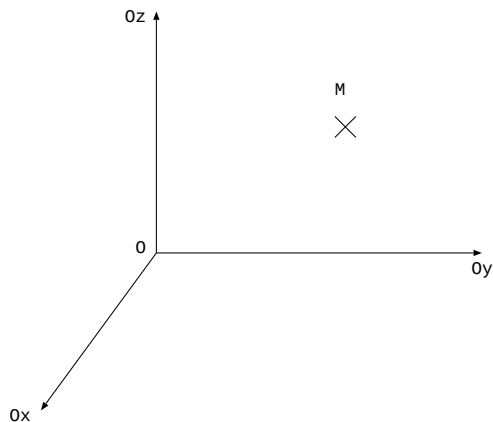
$$\text{rotationnel : } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

$$\text{laplacien scalaire : } \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\frac{\partial V}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$



Volume élémentaire:

2. Coordonnées sphériques



vecteur position: $\overrightarrow{OM} =$

Quand r varie, M se déplace de

Quand θ varie, M se déplace de

Quand ϕ varie, M se déplace de

vecteur déplacement élémentaire :

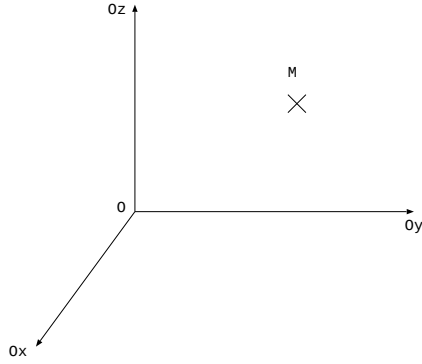
$$d\overrightarrow{OM} =$$

gradient: $\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$

divergence: $\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$

rotationnel: $\vec{\text{rot}}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\phi$

laplacien scalaire: $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$



Volume élémentaire:

Exemple 1 : Soit le champ de vecteurs $\vec{V} = \frac{\alpha y}{x}\vec{e}_x + \beta y^2\vec{e}_y$. Exprimer la divergence de $\vec{V}$.

Exemple 2 : soit en coordonnées cylindriques, le champ scalaire $\phi = \phi_0(r + \frac{R}{r})\cos\theta$. Exprimer le gradient de ϕ .

Exemple 3 : Soit le champ de vitesse $\vec{V} = V_0 \ln r \vec{e}_z$ donné en coordonnées cylindriques avec V_0 une constante. Exprimer la divergence et le rotationnel de $\vec{V}$.