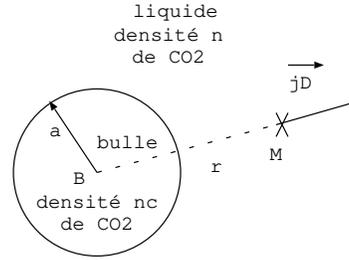


DM 6 de physique

On envisage une bulle de champagne unique, sphérique de centre fixe B et de rayon variable $a(t)$ contenant $N_g(t)$ molécules de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait. On note $n_g(t)$ le nombre, supposé uniforme, de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume dans cette bulle. Le champagne liquide occupe le reste de l'espace et on y note $n(r, t)$ le nombre volumique de molécules de dioxyde de carbone fonction de $r = BM$. Dans cette partie, on néglige la pesanteur.



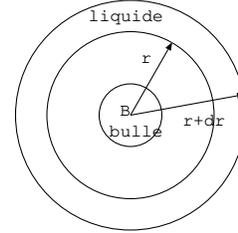
Dans la bouteille fermée, où la pression initiale vaut P_i , l'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution aqueuse qui l'entoure impose la relation $n = \frac{\chi P_i}{k_B T}$ entre le nombre volumique de molécules n de CO_2 dans la phase liquide et la pression P_i dans la phase gazeuse, χ est une constante et k_B est la constante de Boltzmann.

Lorsqu'on ouvre la bouteille de champagne, la pression des bulles chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique $P_e < P_i$. La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution, elle s'écrit $n(r = a, t) = \frac{\chi P_e}{k_B T}$. Loin de la bulle, on suppose qu'on a toujours $n(r \rightarrow \infty, t) = \frac{\chi P_i}{k_B T}$. Ainsi la densité particulière en CO_2 dans le liquide n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution: on note le $\vec{j}_D = j_D(r, t)\vec{e}_r$ le vecteur-densité de flux de particules, il satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D .

On donne le vecteur gradient en coordonnées sphériques: $\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$.

1. Soit une couronne de champagne liquide, comprise entre les rayons r et $r + dr$ (avec $r > a$). Déduire d'un bilan local de particules de CO_2 que

l'on a
$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(j_D(r, t)r^2) = 0.$$



2. Ecrire la loi de Fick dans le liquide et prévoir le signe de $j_D(r, t)$ dans la situation étudiée. La bulle va-t-elle grossir ou disparaître?

3. Montrer qu'en régime stationnaire on a que $\frac{dn}{dr}r^2$ est une constante et en déduire que la densité volumique de CO_2 dans le liquide s'écrit $n(r) = \frac{\chi P_i}{k_B T} + \frac{\chi(P_e - P_i)a}{k_B T r}$.

Bien que le régime réel ne soit pas stationnaire puisque le rayon $a(t)$ de la bulle dépend du temps, on admet que $n(r, t)$ a la même expression que celle trouvée précédemment en remplaçant a par $a(t)$.

4. Exprimer le vecteur densité de courant de molécules de CO_2 en $r = a(t)$ et en déduire δN_g , le nombre de molécules de CO_2 qui rentrent dans la bulle de gaz entre t et $t + dt$.

5. On suppose que le gaz suit le modèle du gaz parfait. Le rayon de la bulle est $a(t)$ à l'instant t et $a(t) + da$ à l'instant $t + dt$. Déduire de la loi des gaz parfaits que la variation du nombre de molécules de CO_2 dans la bulle entre t et $t + dt$ s'écrit: $dN = \frac{4\pi a^2 da P_e}{k_B T}$. Données: $k_B = \frac{R}{N_a}$ où R est la constante des gaz parfaits et N_a , le nombre d'Avogadro et $(1 + \epsilon)^3 \approx 1 + 3\epsilon$ pour ϵ petit.

6. Déduire d'un bilan de matière appliquée à une bulle entre t et $t + dt$, que $ada = -D\chi\left(\frac{P_i}{P_e} - 1\right)dt$. Intégrer cette relation entre $t = 0$ où le rayon de la bulle est a_0 et le temps t_1 où le rayon de la bulle est a_1 . AN: donner un ordre de grandeur de D et calculer t_1 pour $P_e = 1 \text{ bar}$, $P_i = 3 \text{ bars}$, $a_0 = 1 \mu\text{m}$, $a_1 = 10 \mu\text{m}$ et $\chi = 0,7$.