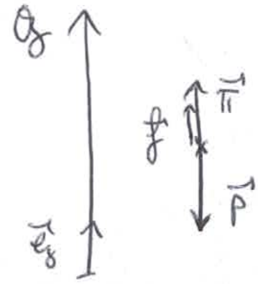
Sédimentation

1) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule subit :



* son poids : $\vec{P} = -\rho_s \frac{4}{3}\pi r^3 g\,\vec{e_z}$
* la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = +\rho_e \frac{4}{3}\pi r^3 g\,\vec{e_z}$
* la force de frottement : $\vec{f} = +6\pi r \eta v\,\vec{e_z}$

RFD appliquée à la particule : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$

la particule a un mvt rectiligne uniforme donc $\vec{a} = \vec{0}$

d'où en projection selon (Oz) : $-\rho_s \frac{4}{3}\pi r^3 g + \rho_e \frac{4}{3}\pi r^3 g + 6\pi r \eta v_\ell = 0$

soit $v_\ell = \dfrac{2r^2 g(\rho_s - \rho_e)}{9\eta}$ avec $\rho_s = d\rho_e$

d'où $\boxed{v_\ell = \dfrac{2r^2 g \rho_e}{9\eta}(d-1)}$

On a noté $\vec{v} = -v\,\vec{e_z}$

pour $v > 0$: il y a sédimentation
cela se produit pour $d > 1$ (particule lourde)

pour $v < 0$: la particule remonte à la surface
cela se produit pour $d < 1$ (particule légère)

---

2) Le temps de chute jusqu'au fond du bac est : $\boxed{t_c = \dfrac{H}{v_\ell} = \dfrac{9\eta H}{2r^2 g \rho_e (d-1)}}$

On cherche r_{min} tel que t_c ne dépasse pas $t_{c\,max} = 2h = 7200\,s$

soit $t_c = \dfrac{9\eta H}{2r^2 g \rho_e (d-1)} \leq t_{c\,max}$ donc $\boxed{r \geq \sqrt{\dfrac{9\eta H}{2 g \rho_e (d-1) t_{c\,max}}}} = \underline{8{,}8\,\mu m}$

Le sable fin, le sable grossier, le limon peuvent se déposer au fond du bac.

---

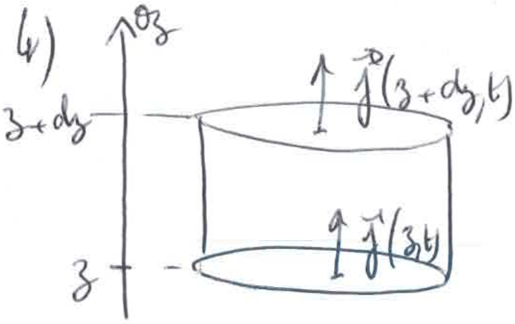
3) Le vecteur densité de courant de convection s'écrit : $\boxed{\vec{j_c} = n^* \vec{v_\ell} = -n^* v_\ell\,\vec{e_z}}$

Le vecteur densité de courant de diffusion est donné par la loi de Fick :

$\vec{j_D} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n^* = -D \dfrac{\partial n^*}{\partial z}\vec{e_z}$ d'où le vecteur $\boxed{\vec{j} = \vec{j_c} + \vec{j_D} = -\left(D\dfrac{\partial n^*}{\partial z} + n^* v_\ell\right)\vec{e_z}}$

---

4)



On exprime :
$N(t)$ et $N(t+dt)$ les nombres de particules contenues dans le système élémentaire à t et $t+dt$.

$$N(t) = n^*(z,t)\, S\, dz$$
$$N(t+dt) = n^*(z,t+dt)\, S\, dz$$

Le nombre de particules qui entrent dans le système entre t et $t+dt$: $\delta N_e = j(z,t)\, S\, dt$
" sortent " : $\delta N_s = j(z+dz,t)\, S\, dt$

La conservation du nombre de particules s'écrit :

$$N(t+dt) = N(t) + \delta N_e - \delta N_s$$

soit $$\underbrace{\left(n^*(z,t+dt) - n^*(z,t)\right)}_{= \frac{\partial n^*}{\partial t} dt \text{ car } dt \text{ petit}} S\, dz = \underbrace{\left(j(z,t) - j(z+dz,t)\right)}_{= -\frac{\partial j}{\partial z} dz \text{ car } dz \text{ petit}} S\, dt$$

d'où $\frac{\partial n^*}{\partial t} \cancel{S\, dt\, dz} = -\frac{\partial j}{\partial z} \cancel{S\, dz\, dt}$ avec $\frac{\partial j}{\partial z} = -\left(D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + \frac{\partial n^*}{\partial z} v_\ell\right)$

soit $$\boxed{\frac{\partial n^*}{\partial t} = +D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n}{\partial z}}$$

5) En régime stationnaire l'équation devient : $\frac{d^2 n}{dz^2} + \frac{v_\ell}{D} \frac{dn}{dz} = 0$

on écrit l'éq. caractéristique : $r^2 + \frac{v_\ell}{D} r = 0$ soit $r = 0$ et $r = -\frac{v_\ell}{D}$

d'où $n^*(z) = A\, e^{0 \times z} + B\, e^{-\frac{v_\ell z}{D}} = A + B e^{-v_\ell z / D}$

les conditions aux limites sont $\boxed{n^*(z=0) = n_0} = A + B$

au fond du bassin

et $\boxed{j(z=0) = 0}$

avec $j(z) = -D \frac{dn^*}{dz} - v_\ell n^* = -\cancel{D}\left(-\frac{v_\ell}{\cancel{D}} B e^{-\frac{v_\ell z}{D}}\right) - v_\ell \left(A + B e^{-\frac{v_\ell z}{D}}\right)$

$j(z=0) = +v_\ell B - v_\ell (A + B) = -v_\ell A = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$ et $\underline{B = n_0}$

d'où $\boxed{n^*(z) = n_0\, e^{-v_\ell z / D}}$ avec $\boxed{\delta = \frac{D}{v_\ell}}$ par identification avec l'énoncé

6) $\delta = \frac{D}{v_\ell} = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \times \frac{9\eta}{2r^2 g \rho_e (d-1)} = \frac{3 k_B T}{4\pi r^3 g \rho_e (d-1)} = \underline{6.10^{-11}\ m}$

avec $\left[\frac{D}{v_\ell}\right] = \frac{m^2 s^{-1}}{m s^{-1}} = m$

La concentration $n^*(z)$ varie sur une échelle de distance de l'ordre de δ donc la diffusion se produit sur cette échelle de longueur infiniment petite sur la hauteur H du bassin. donc la diffusion ne se manifeste pas, les particules ne font que tomber sous l'effet de la gravité.

---

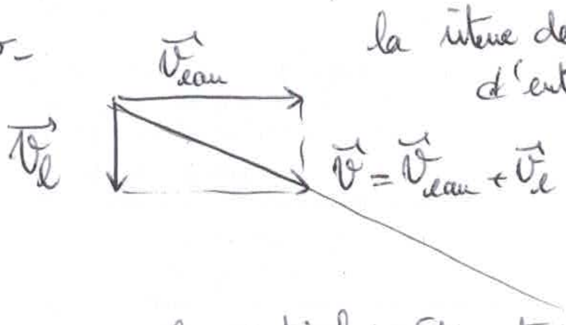
7)a Le débit volumique est $D_v = v_{eau} \times S$ ← section perpendiculaire à la vitesse de l'eau soit $S = H \times l = \frac{HL}{6}$

d'où $\boxed{v_{eau} = \frac{D_v 6}{HL}}$

Le temps mis par l'eau pour traverser le dessableur est donc $\boxed{\Delta t = \frac{L}{v_{eau}} = \frac{HL^2}{6 D_v}}$

---

7)b –



la vitesse des particules est la résultante des vitesses d'entraînement de l'eau et de la vitesse liée à la gravité : les particules décrivent une trajectoire rectiligne oblique dans la direction de $\vec{v}$.

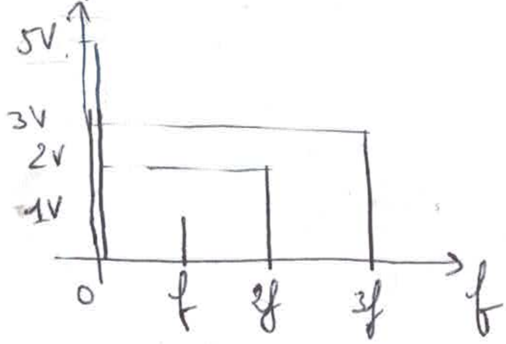
Pour que les particules sédimentent, il faut qu'elles touchent le fond du bassin avant d'atteindre la sortie du dessableur soit $t_c \leq \Delta t$

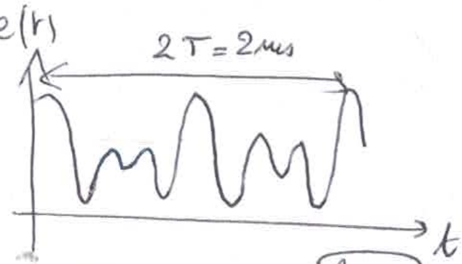
d'où $\frac{H}{v_\ell} \leq \frac{HL^2}{6 D_v}$ d'où $\boxed{L > \sqrt{\frac{6 D_v}{v_\ell}} = \sqrt{\frac{D_v\, 27 \eta}{r^2 g \rho_e (d-1)}}}$

AN : $L > \sqrt{\frac{20.10^{-3} \times 27 \times 10^{-6}}{(8,8.10^{-6})^2 \times 9,8 \times 1,65}} = \underline{21\ m}$

Filtrage

1) Spectre de $e(t)$:

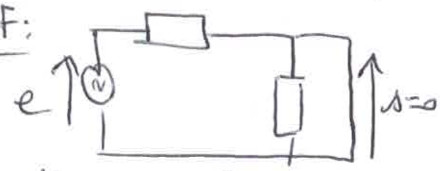




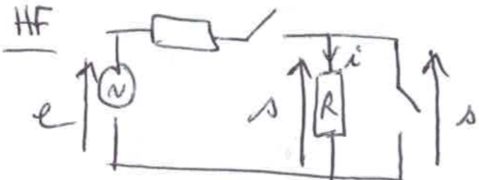
$T = 1\,ms$ soit $\boxed{f = \frac{1}{T}} = 1\,kHz$

2) Filtre 1 :

BF :



HF



$s = Ri$ avec $i=0$
donc $s=0$

Ce filtre coupe les BF

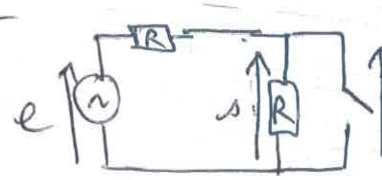
Ce filtre coupe les HF

Ce filtre est un filtre passe-bande

Filtre 2 :

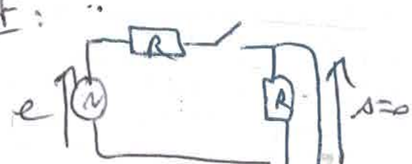
BF

diviseur de tension :



$s = \frac{R}{R+R} e = \frac{e}{2}$

HF :



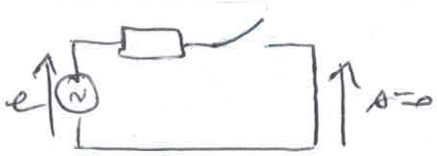
Ce filtre laisse passer les BF

Ce filtre coupe les HF

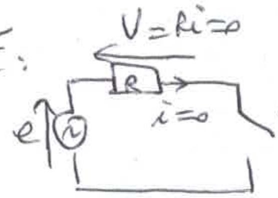
Ce filtre est un filtre passe-bas

Filtre 3.

BF



HF :



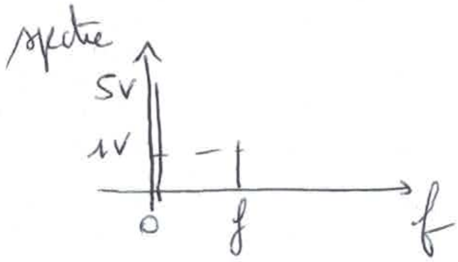
$s = e - U = e$

Ce filtre coupe les BF

Ce filtre laisse passer les HF

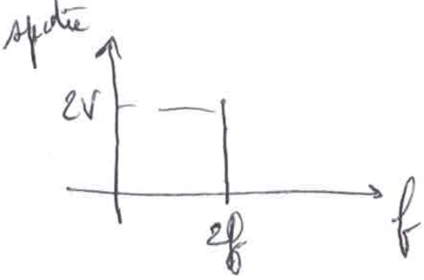
Ce filtre est un filtre passe-haut

3) Sortie a : le signal de sortie est sinusoïdal de fréquence f d'amplitude crête à crête 2V (6-4 = 2V) soit d'amplitude <u>1V</u> avec un décalage de <u>5V</u>



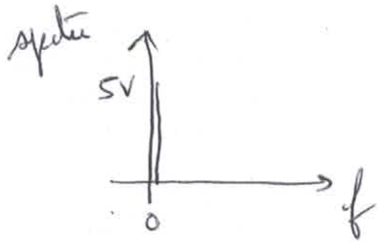
On a utilisé un filtre passe bas avec une fréquence de coupure comprise entre f et 2f : <u>filtre b</u>

Sortie b : le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude <u>2V</u> <u>sans décalage</u> et de fréquence 2f.



On a utilisé un filtre passe-bande avec une fréquence de résonance voisine de 2f et une bande passante inférieure à 2f : <u>filtre a</u>

<u>Sortie c :</u> le signal de sortie est <u>continu d'amplitude 5V</u>



On a utilisé un filtre passe-bas de fréquence de coupure inférieure à f : <u>filtre b</u>