Correction : diffusion de particules

I) L'équation de diffusion s'écrit : $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ pour $n = n(x,t)$

Par analyse dimensionnelle : $\left[\frac{\partial n}{\partial t}\right] = \frac{n}{\tau}$ $\quad \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right] = \frac{n}{L^2}$ d'où $\boxed{\tau = \frac{L^2}{D}}$

Le coefficient de diffusion dans un liquide est : $D \sim 10^{-10}\ m^2 s^{-1}$

La taille caractéristique d'une tasse est de quelques centimètres ($L \sim 5.10^{-2}$ m)

soit $\tau = \frac{(5.10^{-2})^2}{10^{-10}} = 25.10^6\ s$. la diffusion est un phénomène très lent car au plus elle se produit et au moins elle est efficace

II) 1a) Le volume compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$ est :

$$\pi(r+dr)^2 L - \pi r^2 L \simeq 2\pi r L\, dr$$

1b) $\delta N_e = j_D(r)\, 2\pi r L\, dt$ les particules entrent à travers le cylindre de rayon r

$\delta N_s = j_D(r+dr)\, 2\pi (r+dr) L\, dt$ les particules sortent à travers le cylindre de rayon $r+dr$

$\delta N_p = p \times 2\pi r L\, dr\, dt$

$N(t+dt) = n(r,t+dt)\, 2\pi r L\, dr$

$N(t) = n(r,t)\, 2\pi r L\, dr$

1c) La conservation du nombre de neutrons s'écrit :

$$N(t+dt) = N(t) + \underbrace{(\delta N_e + \delta N_p)}_{\text{particules reçues}} - \underbrace{(\delta N_s)}_{\text{particules perdues}}$$

soit $\underbrace{\left[n(r,t+dt) - n(r,t)\right]}_{\frac{\partial n}{\partial t}(r,t)\,dt \text{ car } dt \text{ petit}} 2\pi r L\, dr = 2\pi L\, dt \underbrace{\left[j_D(r,t)\, r - j_D(r+dr,t)(r+dr)\right]}_{-\frac{\partial}{\partial r}(j_D(r,t)\, r)\, dt} + p\, 2\pi r L\, dt$

en simplifiant par $dr\, dt$ il vient :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(j_D(r,t)\, r\right) + p}$$

c'est l'équation locale de conservation du nombre de neutrons

2) La loi de Fick s'écrit $\boxed{\vec{j}_D = -D\, \vec{\text{grad}}\, n}$ Elle traduit que les particules diffusent des fortes vers les faibles concentrations et que la diffusion cesse lorsque la concentration est uniforme.

3) En régime stationnaire $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(j_D(r,t)\, r\right) + p = 0$

avec $j_D = -D\frac{dn}{dr}$ soit $\boxed{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dn}{dr}\right) = -\frac{pr}{D}}$ équation de diffusion en régime stationnaire

4) On intègre par rapport à r : $r\frac{dn}{dr} = -\frac{pr^2}{2D} + A$

soit $\frac{dn}{dr} = -\frac{pr}{2D} + \frac{A}{r}$

On intègre par rapport à r : $n(r) = -\frac{pr^2}{4D} + \underbrace{A\ln r}_{} + B$

$\ln r \xrightarrow[r\to 0]{} \infty$ donc $A = 0$ pour que $n(r)$ soit défini pour $r < R$

soit $n(r) = -\frac{pr^2}{4D} + B$ avec $n(r=0) = n_0 = B$

d'où $\boxed{n(r) = n_0 - \frac{pr^2}{4D}}$