Correction DM 6 de physique

1. Soit le système élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$.

Soit $N(t)$ le nombre de molécules de CO_2 dans le système à l'instant t: $N(t) = 4\pi r^2 dr n(r,t)$

Soit $N(t+dt)$ le nombre de molécules de CO_2 dans le système à l'instant $t+dt$: $N(t+dt) = 4\pi r^2 dr n(r,t+dt)$

Soit δN_e le nombre de molécules qui entrent dans le système entre t et $t+dt$ soit $j_D(r)4\pi r^2 dt$

Soit δN_s le nombre de molécules qui sortent du système entre t et $t+dt$ soit $j_D(r+dr)4\pi(r+dr)^2 dt$

La conservation du nombre de molécules s'écrit $N(t+dt) = N(t) + \delta N_e - \delta N_s$

Soit $4\pi r^2 dr(n(r,t+dt) - n(r,t)) = -4\pi dt(j_D(r+dr)(r+dr)^2 - j_D(r)r^2)$

En faisant des DL car dt petit et dr petit, on obtient:

$4\pi r^2 dr\dfrac{\partial n}{\partial t}dt = -4\pi dt\dfrac{\partial(j_D(r)r^2)}{\partial r}dr$ soit $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{-1}{r^2}\dfrac{\partial(j_D(r)r^2)}{\partial r}$.

2. La loi de Fick s'écrit $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{\text{grad}}n$, elle traduit que les particules de CO_2 diffusent des fortes concentrations (soit loin de la bulle où $P = P_i$) vers les faibles concentrations (soit vers la bulle où $P = P_e < P_i$) donc $j_D < 0$. Les bulles grossissent, le CO_2 diffusent et entrent dans la bulle.

3. En régime stationnaire, on a $\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\dfrac{\partial(j_D(r)r^2)}{\partial r} = 0$. Ce qui signifie que la quantité $j_D(r)r^2$ est une constante.

Or $j_D = -D\dfrac{dn}{dr}$ d'après la loi de Fick donc $\dfrac{dn}{dr}r^2$ est une constante soit $\dfrac{dn}{dr} = \dfrac{A}{r^2}$ et après intégration par rapport à r on a $n(r) = \dfrac{-A}{r} + B$. On trouve A et B avec les conditions aux limites soit:

$n(r\to\infty) = \dfrac{\chi P_i}{k_BT} = B$

$n(r=a) = \dfrac{\chi P_i}{k_BT} = \dfrac{-A}{a} + B$, on a donc $A = -\dfrac{\chi(P_e - P_i)a}{k_BT}$

La densité volumique de CO_2 dans le liquide est donc $n(r) = \dfrac{\chi P_i}{k_BT} + \dfrac{\chi(P_e - P_i)a}{k_BTr}$.

4. D'après la loi de Fick: $j_D(r,t) = -D\dfrac{\partial n}{\partial r} = D\dfrac{\chi(P_e - P_i)a}{k_BTr^2}$ d'où son expression en $r = a$: $j_D(r=a,t) = -D\dfrac{\chi(P_i - P_e)}{k_BTa} < 0$.

Le nombre de molécules de CO_2 qui sortent de la bulle par unité de temps est $j_D(r=a,t)4\pi a^2 dt = -D\dfrac{4\pi a\chi(P_i - P_e)}{k_BT}dt < 0$ et le nombre de molécules qui entrent dans la bulle de gaz est donc $\delta N_g = -j_D(r=a,t)4\pi a^2 dt = D\dfrac{4\pi a\chi(P_i - P_e)}{k_BT}dt > 0$.

5. D'après la loi des GP on a $n = \dfrac{PV}{RT} = \dfrac{N}{\mathcal{N}_a}$ soit $N = \dfrac{P\mathcal{N}_aV}{RT} = \dfrac{PV}{k_BT}$ (dans ces expressions n désigne le nombre de moles et N le nombre de molécules).

La variation du nombre de molécules de CO_2 s'écrit donc:

$dN = N(t+dt) - N(t) = \dfrac{P_e\frac{4\pi(a+da)^3}{3}}{k_BT} - \dfrac{P_e\frac{4\pi a^3}{3}}{k_BT}$ (la pression du CO_2 dans les bulles dans la bouteille ouverte est P_e)

Soit $dN = \dfrac{4\pi P_e}{3k_BT}(((a+da)^3 - a^3) = \dfrac{4\pi P_e a^3}{3k_BT}((1+\dfrac{da}{a})^3 - 1) \approx \dfrac{4\pi P_e a^3}{3k_BT}((1+3\dfrac{da}{a}) - 1) \approx \dfrac{4\pi P_e a^3}{3k_BT}3\dfrac{da}{a} \approx \dfrac{4\pi P_e a^2 da}{k_BT}$.

Les molécules de CO_2 s'échappent de la bulle donc $dN < 0$ et $da < 0$ (le rayon $a(t)$ et le nombre de molécules N diminuent donc leur variation est négative).

6. La conservation de la matière impose $N(t+dt) = N(t) + \delta N_g$ soit $N(t+dt) - N(t) = dN = +\delta N_g$ ce qui donne en remplaçant par les expressions trouvées $\dfrac{4\pi P_e a^2 da}{k_BT} = Ddt\dfrac{4\pi a\chi(P_i - P_e)}{k_BT}$ soit $ada = (\dfrac{P_i}{P_e} - 1)D\chi dt$.

On intègre le membre de gauche par rapport à a et le membre de droite par rapport à t:

$\int_{a_0}^{a_1} ada = (\frac{P_i}{P_e} - 1)D\chi \int_0^{t_1} dt$ soit $\frac{a_1^2 - a_0^2}{2} = (\frac{P_i}{P_e} - 1)D\chi t_1$ d'où $t_1 = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2(\frac{P_i}{P_e} - 1)D\chi}$. AN: le coefficient de diffusion dans un liquide est de l'ordre de $10^{-10}\ m^2.s^{-1}$ soit $t_1 = 0,35\ s$.