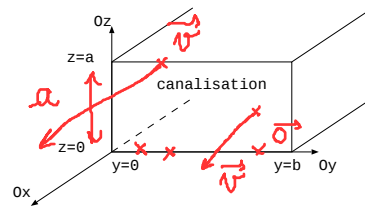


I. Ecoulement de Couette plan

On étudie l'écoulement d'un fluide dans une canalisation comprise entre les plans $z = 0$ et $z = a$ et les plans $y = 0$ et $y = b$. Le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \frac{v_0 z}{a} \vec{e}_x$$



1. L'écoulement est-il stationnaire ? incompressible ? irrotationnel ?
2. Calculer l'accélération d'une particule fluide. Commenter le résultat.
3. Calculer le débit volumique à travers une section de la canalisation. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

1) $\vec{v}$ ne dépend pas de $t \Rightarrow$ stationnaire

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_0 z}{a} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ incompressible

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

iii $v_x = \frac{v_0 z}{a}$ variable $v_y = 0$ $v_z = 0$
Composante

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \wedge \left(\frac{v_0 z}{a} \vec{e}_x \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_0 z}{a} \right) \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_0 z}{a} \right) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$$

$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$ $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{v_0}{a} \vec{e}_y \neq \vec{0} \Rightarrow \text{rotationnel}$$

les particules fluide tournent autour de ($+Oy$)

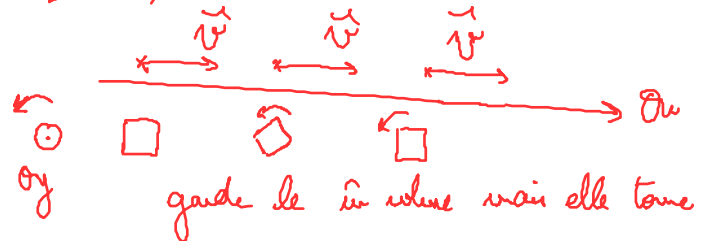
$$2) \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \frac{v_0 z}{a} \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \frac{v_0 z}{a} \frac{\partial}{\partial x}$$

Δ on ne change pas l'ordre des termes

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{v_0 z}{a} \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = \frac{v_0 z}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_0 z}{a} \vec{e}_x \right) = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \text{mvt rectiligne uniforme}$$



$$3) \mathcal{D}_v = \iint v_x dS$$

à travers la surface $\perp$ à $\vec{v}$, ici c'est la surface

comprise entre $z=0$ et $z=a$ et $y=0$ et $y=b$ (plan (Oyz) $\perp$ à $\vec{v} = \dots \vec{e}_x$)

M(y, z) donc $dS = dy dz$

$$\mathcal{D}_v = \iint \frac{v_0 z}{a} dy dz = \frac{v_0}{a} \int_0^b dy \int_0^a z dz = \frac{v_0 b a^2}{2a}$$

$$\mathcal{D}_v = v_{\text{moy}} \times \text{surface de la canalisation}$$

$$\frac{v_0 b a}{2} = v_{\text{moy}} \times a b \Rightarrow v_{\text{moy}} = \frac{v_0}{2}$$