

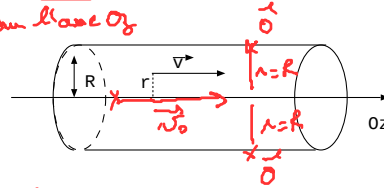
I. Ecoulement de Poiseuille

$$V_0 > 0$$

On considère l'écoulement décrit par le champ des vitesses : $\vec{v} = v_0(1 - \frac{r^2}{R^2})\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques avec $r < R$. Cet écoulement, dit de Poiseuille, correspond à celui d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique d'axe Oz et de rayon R .

$$\vec{v}(r=0) = V_0 \vec{e}_z \quad \vec{v}(r=R) = \vec{0}$$

sur l'axe Oz



$\|\vec{v}\| \downarrow$ quand $r \uparrow$ (quand on s'éloigne de (Oz))

1) $\vec{v}$ ne dépend pas de $t \Rightarrow$ stationnaire

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z \quad \text{ici} \quad v_r = 0 \quad v_\theta = 0 \quad v_z = V_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

composante v_z variable

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (V_0(1 - \frac{r^2}{R^2})) = 0 \Rightarrow \text{incompressible (il garde le m même)}$$

$$\text{rot } \vec{v} = (\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}) \vec{e}_r + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} (\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}) \vec{e}_z = -\frac{\partial}{\partial r} (V_0(1 - \frac{r^2}{R^2})) \vec{e}_\theta = +V_0 \frac{2r}{R^2} \vec{e}_\theta$$

$\Rightarrow$ rotationnel (il tourne autour de $\vec{e}_\theta$)

$$2) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

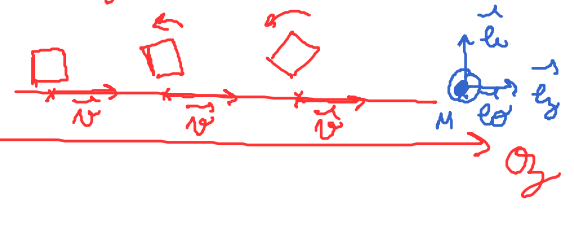
$$\vec{v} \cdot \text{grad} = V_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) \vec{e}_z \cdot (\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z) = V_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = V_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) \frac{\partial}{\partial z} (V_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) \vec{e}_z) = \vec{0}$$

alt

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \text{mouvement rectiligne uniforme (il a l'axe } Oz)$$

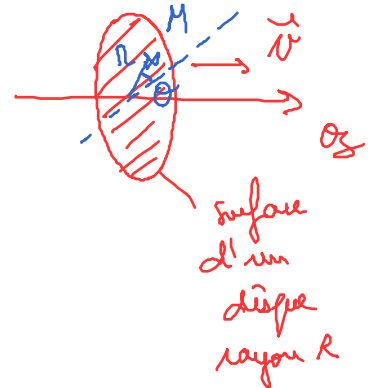
! on ne change pas l'ordre des termes



$$3) D_v = \iint V(M) dS$$

M est un point de la surface traversée par le fluide et $\perp$ à $\vec{v}$ (plan (Oz))

$$M(r, \theta) : dS = r dr d\theta$$



$$D_v = \iint V_0(1 - \frac{r^2}{R^2}) r dr d\theta$$

$$D_v = V_0 \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R (1 - \frac{r^2}{R^2}) r dr = V_0 2\pi (\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}) = V_0 2\pi \frac{R^2}{4} = \frac{V_0 \pi R^2}{2}$$

$$D_v = V_{\text{moy}} \times \text{surface traversée par le fluide} = V_{\text{moy}} \times \pi R^2 \Rightarrow \frac{V_0 \pi R^2}{2} = V_{\text{moy}} \pi R^2$$

" πR^2

$$V_{\text{moy}} = \frac{V_0}{2}$$