Chap MF3: hydrostatique

I. **Hydrostatique dans un référentiel galiléen**

1. *RFH ou relation fondamentale de l'hydrostatique*

On considère une particule fluide de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho d\tau$ immobile dans le référentiel terrestre supposé **galiléen**. Cette particule fluide est à l'équilibre sous l'action des forces:

-

-

L'équilibre de la particule fluide s'écrit:

Cas 1: l'axe Oz vertical ascendant:

Cas 2:l'axe Oz est vertical descendant:

Remarque : Pourquoi la force de viscosité n'intervient-elle pas?

Remarque : si le fluide est un liquide, sa masse volumique ρ est constante (soit indépendante de la pression).

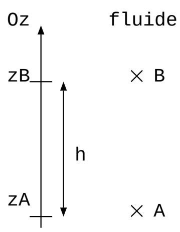
Si le fluide est un gaz, sa masse volumique dépend de sa pression et l'énoncé précise alors d'utiliser l'hypothèse des gaz parfaits pour déterminer la relation entre ρ et P soit:

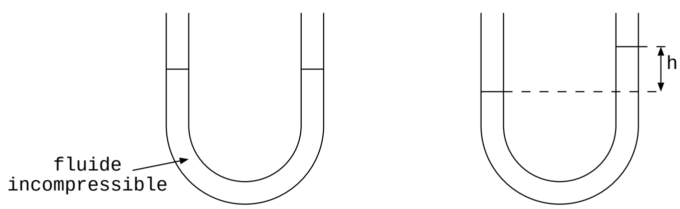
Remarque : la pression à la surface libre d'un liquide est égale à la pression de l'atmosphère.

2. *Application 1 : pression dans un gaz isotherme supposé parfait*

A retenir : dans un gaz, la pression ne varie qu'à l'échelle du kilomètre donc dans une pièce, la pression d'un gaz est uniforme.

3. *Application 2 : pression dans un fluide homogène incompressible*





II. **Hydrostatique dans un référentiel non galiléen**

Dans ce paragraphe, le fluide est à l'équilibre dans un référentiel **non galiléen** (par exemple: fluide dans un bécher en rotation). On considère une particule fluide de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho d\tau$ immobile dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$. Cette particule fluide est à l'équilibre sous l'action des forces:

-

-

-

Outil mathématique : il existe des situations où la pression dépend de deux variables donc on est amené à résoudre un système d'équations par exemple de la forme: $\dfrac{\partial P}{\partial x} = kx$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = Cy^2$. On cherche $P(x, y)$ (k et C sont des constantes).

III. **Atmosphère non isotherme**

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g/mol$. Sa pression est notée P, sa masse volumique ρ (pour les valeurs de P et ρ au niveau du sol on utilise les indices 0).

1. Exprimer la pression en fonction de l'altitude z dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme de température $T_0 = 293\ K$. En déduire l'altitude H pour laquelle la pression est égale à $P_0/2$.

2. Le modèle de l'atmosphère isotherme n'est pas très réaliste, on admet donc que jusqu'à une altitude de $10\ km$, la température de l'air dépend de l'altitude z selon la loi : $T = T_0(1 - \alpha z)$ avec $\alpha = 2,5.10^{-5}\ m^{-1}$.

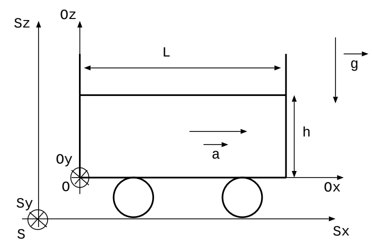
2.a. Quelle est la variation d'altitude pour laquelle la température diminue de $1\ ^0C$?

2.b. Montrer que la pression s'écrit $P = P_0(1 - \alpha z)^{\beta}$, exprimer β. En déduire l'altitude h pour laquelle la pression est égale à $P_0/2$. Comparer à H.

2.c. Montrer que la masse volumique s'écrit $\rho = \rho_0(1 - \alpha z)^{\beta - 1}$.

*R*éponses : $H = \frac{RT_0 \ln 2}{Mg} = 5,8\ km$, $\beta = \frac{Mg}{\alpha R T_0}$, $h = 5,4\ km$

IV. **Fluide incompressible dans un chariot**



Un chariot au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen, contient une hauteur h d'un fluide incompressible de masse volumique ρ. Ce chariot est mis en mouvement et acquiert un mouvement rectiligne uniformément accéléré (on note $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{e_x}$ son accélération). On cherche à décrire l'allure de la surface libre du fluide.

On note $\mathcal{R}(S, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel fixe lié au sol et supposé galiléen. On note $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel mobile lié au chariot.

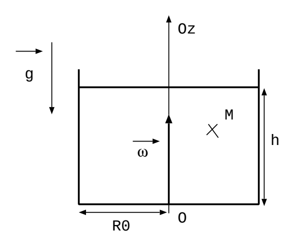
1. Exprimer la pression de l'eau dans le chariot lorsque le chariot est immobile.

2. Représenter l'allure de la surface libre lorsque le chariot est en mouvement.

3. Déduire d'un bilan des forces appliquées à une particule fluide de volume $d\tau$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les dérivées partielles de la pression par rapport à x, y et z. En déduire $P(x, z)$ en fonction d'une constante d'intégration.

4. Déduire de la conservation de la masse l'expression de la constante d'intégration. En déduire l'équation de la surface libre du liquide.

V. **Liquide dans un récipient en rotation**



Un récipient cylindrique de rayon R_0 est rempli d'eau sur une hauteur h_0 lorsqu'il est au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note ρ la masse volumique de l'eau. Ce cylindre est mis en rotation autour de son axe de symétrie Oz à la vitesse angulaire constante ω. On cherche à décrire l'allure de la surface libre du fluide.

On note $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel fixe lié au sol et supposé galiléen. On note $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$, le référentiel mobile lié au cylindre.

1. Représenter l'allure de la surface libre lorsque le récipient est en mouvement.

2. On considère une particule fluide M de volume $d\tau$, on repère sa position à l'aide des coordonnées cylindriques (r, θ, z). Déduire d'un bilan des forces appliquées à cette particule fluide dans le référentiel $\mathcal{R}'$, les dérivées partielles de la pression par rapport à r, θ et z. On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

3. En déduire la pression dans le fluide contenu dans le cylindre en fonction de z, r, ω, ρ, g et d'une constante d'intégration que l'on ne cherchera pas à calculer. AN: calculer la différence de hauteur entre le point le plus bas et le point le plus haut dans le récipient pour $\omega = 1\ tour/s$ et $r_0 = 5\ cm$.