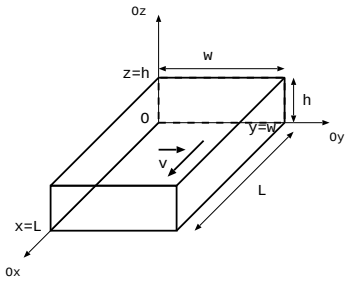
Interrogation mercredi 14 décembre

I. **Ecoulement dans un micro canal**

Un micro-canal horizontal de section rectangulaire est rempli d'eau considéré comme un fluide incompressible. Un gradient de pression dans la direction x impose la différence de pression $\Delta P = P(x = 0) - P(x = L) > 0$ entre les extrémités $x = 0$ et $x = L$ du canal. Le champ de vitesse en régime stationnaire s'écrit $\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{e_x}$. Donnée: viscosité de l'eau $\eta = 1,0.10^{-3}\ Pa.s$, dimensions du canal $h = 10\ \mu m$, $w = 100\ \mu m$ et $L = 1\ mm$.



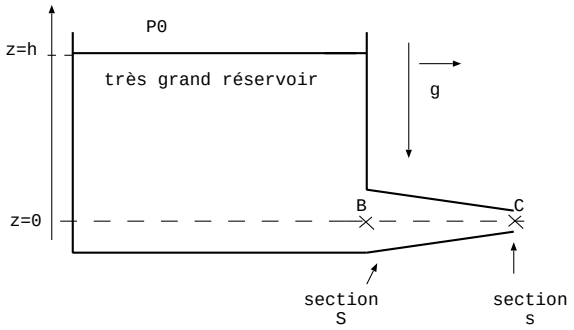
1. Le débit volumique de l'eau D_v dans la section du canal est $D_v = 10^{-12}\ m^3.s^{-1}$. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement dans le canal.

2. Définir et calculer le nombre de Reynolds (pour la taille caractéristique du système on prend la plus petite dimension du canal). En déduire la nature de l'écoulement.

3. On suppose que l'on a $P = P(x)$ avec $\dfrac{dP}{dx} = -\dfrac{\Delta P}{L}$ et on néglige l'effet du poids dans le canal. Préciser le signe de $v(z)$ pour $\Delta P > 0$. Déduire de l'équation de Navier-Stokes que le champ des vitesses s'écrit $v(z) = \dfrac{\Delta P z}{2\eta L}(h - z)$.

II. **Tuyau conique au bout d'un réservoir**

Un réservoir de très grande section contient un fluide de viscosité négligeable et incompressible de masse volumique ρ. Le réservoir est percé d'un trou de surface S (en B) dans lequel est emmanché un tuyau conique de faible longueur dont la sortie possède une section s (en C). On pose $s = \alpha S$ avec α coefficient sans dimension compris entre 0 et 1. La pression atmosphérique vaut P_0. On suppose l'écoulement quasi-stationnaire.

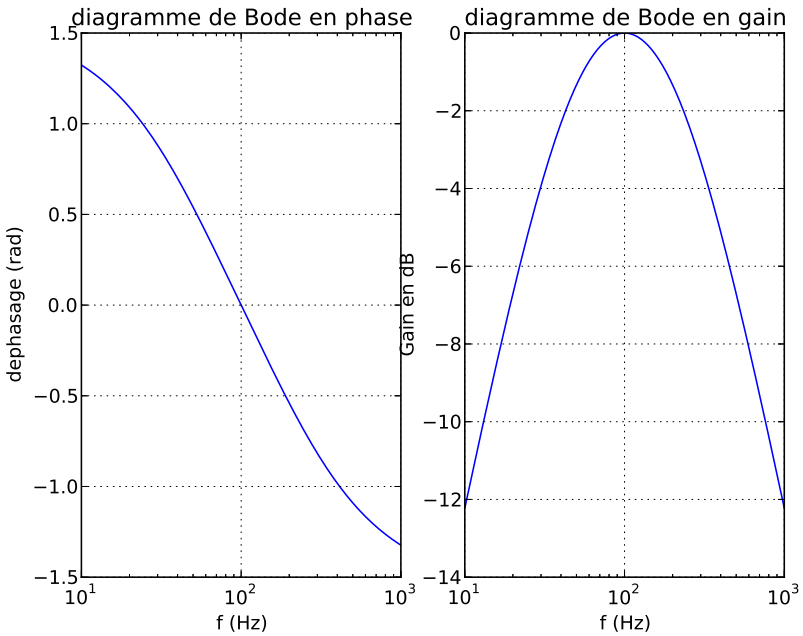


1. Introduire un point A bien choisi à la surface du réservoir, appliquer la relation de Bernoulli pour trouver la vitesse en C et en déduire la vitesse en B.

2. Déduire de la relation de Bernoulli, la pression à l'entrée du tuyau au point B, en fonction des grandeurs P_0, α, ρ, g et h. Commenter les deux cas limites : $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

III. **Filtrage**

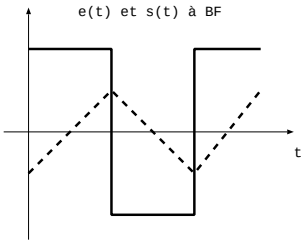
Lors d'une séance de travaux pratiques, un élève réalise un filtre et obtient les diagrammes de Bode en phase et en gain suivants:



1. Vérifier que la fonction transfert associée à ce filtre peut être de la forme $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$. Déduire de la courbe les valeurs numériques de ω_0 et Q.

2. La tension d'entrée est $U_e(t) = 2 + 4\cos(2\pi 20t) + 3\cos(2\pi 700t)$. Etablir l'expression de la tension de sortie.

3. A basse fréquence, donner un équivalent de la fonction de transfert et en déduire l'expression de $U_s(t)$ en fonction de $U_e(t)$. Ce filtre est-il dérivateur ou intégrateur à basse fréquence? Identifier sur les courbes l'entrée et la sortie en justifiant votre réponse.



IV. **Correction : écoulement dans un micro canal**

1. $D_v = v_{moy} hw$ soit $v_{moy} = \dfrac{D_v}{hw} = 1,0\ mm.s^{-1}$.

2. Le nombre de Reynolds s'écrit $Re = \dfrac{terme\ convectif}{terme\ diffusif} = \dfrac{||\rho(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}||}{||\eta\Delta\overrightarrow{v}||} = \dfrac{\rho v h}{\eta} = 10^{-2} << 1$: cet écoulement est laminaire, les effets diffusifs l'emportent.

3. L'équation de Navier Stokes s'écrit: $\rho(\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g}$

ici on est en régime stationnaire : $\dfrac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

avec $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(z)\dfrac{d}{dx}$ et donc $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(z)\dfrac{d}{dx}(v(z)\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$

avec $\Delta\overrightarrow{v} = \dfrac{d^2v}{dz^2}\overrightarrow{e_x}$

avec $\overrightarrow{\text{grad}}P = \dfrac{dP}{dx}\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{\Delta P}{L}\overrightarrow{e_x}$.

d'où $0 = \dfrac{\Delta P}{L}\overrightarrow{e_x} + \eta\dfrac{d^2v}{dz^2}\overrightarrow{e_x}$ soit $\dfrac{d^2v}{dz^2} = -\dfrac{\Delta P}{L\eta}$.

On intègre deux fois: $\dfrac{dv}{dz} = -\dfrac{\Delta P z}{L\eta} + A$ et $v(z) = -\dfrac{az^2}{2\eta} + Az + B$. Le fluide visqueux adhère aux parois donc $v(z=0) = 0 = B$ et $v(z=h) = 0 = -\dfrac{\Delta P h^2}{2L\eta} + Ah$ d'où $A = \dfrac{\Delta P h}{2L\eta}$.

V. **Correction: tuyau**

1. L'écoulement est quasi-stationnaire et incompressible, le fluide est parfait et il n'y a pas de pièces mobiles, on peut donc appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant. Je prends une ligne de courant partant d'un point A à la surface de l'eau dans le récupérateur et passant par B et C. On a donc:

$P_A + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = P_C + \rho g z_C + \frac{\rho v_C^2}{2}$

avec $P_A = P_C = P_0$, $z_A = h$, $z_B = z_C = 0$ et par conservation du débit volumique pour l'écoulement incompressible on a $v_B S = v_C s$, le réservoir est très grand donc la vitesse en A est négligeable.

En utilisant les points A et C on a : $P_0 + \rho g h = P_0 + \frac{\rho v_C^2}{2}$ soit $v_C = \sqrt{2gh}$ d'où $v_B = \frac{s}{S}\sqrt{2gh}$.

2. En utilisant les points B et A on a: $P_B + \frac{\rho s^2 g h}{S^2} = P_0 + \rho g h$ soit $P_B = P_0 + \rho g h(1 - \frac{s^2}{S^2}) = P_0 + \rho g h(1 - \alpha^2)$.

Cas où $\alpha = 0$: cela signifie que l'embout est fermé donc le fluide ne s'écoule pas, on fait de la statique. La pression au fond du bassin est $P_0 + \rho g h$.

Cas où $\alpha = 1$: l'embout a la même section en B et en C donc $v_B = v_C$, or ces deux points sont à la même altitude donc ils sont à la même pression soit $P_B = P_0$.

VI. **Correction : Filtrage**

1. Le filtre est un filtre passe bande.

Quand on fait tendre ω vers 0, la fonction de transfert est nulle donc le filtre coupe les BF. Quand on fait tendre ω vers $+\infty$, la fonction de transfert est nulle donc le filtre coupe les HF. La fonction de transfert correspond bien à un filtre passe bande.

ω_0 est la pulsation de résonance soit $f_0 = 100\ Hz$ et $\omega_0 = 2\pi f_0 = 628\ Hz$.

On a $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ où Δf est la bande passante. On lit ici que les fréquences de coupure sont 45 Hz et 250 Hz soit $Q = \frac{628}{250 - 45} \approx 3,1$.

2. La tension $U_e(t)$ est composée de trois signaux sinusoidaux de fréquences 0 Hz, 20 Hz et 700 Hz.

f	0 Hz	20 Hz	700 Hz
ϕ		$1,1\ rad$	$-1,3\ rad$
G_{dB}	$-\infty$	-7	-9
G	0	$10^{-7/20} = 0,44$	$10^{-9/20} = 0,35$

La tension de sortie s'écrit $U_s(t) = 2 \times 0 + 4 \times 0,44 \cos(2\pi 20t + 1,1) + 3 \times 0,35 \cos(2\pi 700t - 1,3)$.

3. A basse fréquence, la fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \frac{1}{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ d'où $\underline{s} = \frac{j\omega \underline{e}}{Q\omega_0}$. La multiplication par $j\omega$ est équivalente à une dérivée par rapport au temps soit $s = \frac{1}{Q\omega_0}\frac{de}{dt}$. La sortie est donc la dérivée de l'entrée, ce filtre est dérivateur. On envoie en entrée un triangle (bouts de fonctions affines) et en sortie on obtient un créneau (la dérivée d'une fonction affine est une fonction constante).