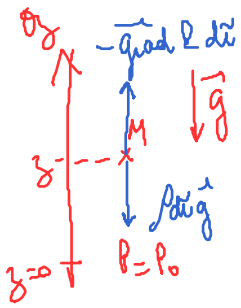


I. Atmosphère non isotherme

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g/mol}$. Sa pression est notée P , sa masse volumique ρ (pour les valeurs de P et ρ au niveau du sol on utilise les indices 0).

1. Exprimer la pression en fonction de l'altitude z dans l'hypothèse d'une atmosphère isotherme de température $T_0 = 293 \text{ K}$. En déduire l'altitude H pour laquelle la pression est égale à $P_0/2$.



La particule fluide de volume dV de masse $dm = \rho dV$ est à l'équilibre de R galiléen :

$$\vec{0} = \underbrace{\rho dV \vec{g}}_{\text{poids}} - \underbrace{\text{grad } P dV}_{\text{pression}}$$

$$\text{grad } P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{en } (0x) : 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow P \text{ ne dépend pas de } x$$

$$\text{en } (0y) : 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \text{ " " de } y$$

$$\text{en } (0z) : 0 = -\rho g - \frac{dP}{dz} \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

! ici ρ dépend de P :

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

$$\text{d'où : } \frac{dP}{dz} = -\frac{MgP}{RT_0}$$

$$\text{on écrit : } \frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} P = 0 \quad \text{solution : } P = A e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$$

$$\text{C.A. } P(z=0) = A = P_0$$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_{z=0}^z dz$$

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mg}{RT_0} z$$

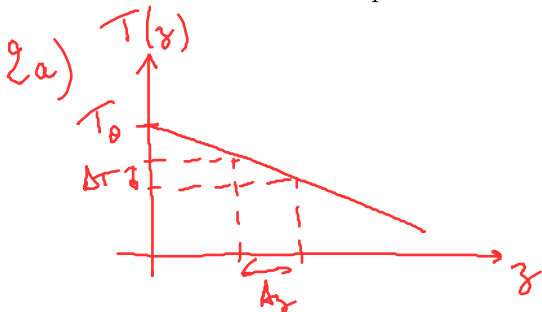
$$\left. \begin{aligned} P(z=H) &= \frac{P_0}{2} \\ P_0 e^{-\frac{MgH}{RT_0}} &= \frac{P_0}{2} \\ H &= \frac{RT_0}{Mg} \ln 2 \end{aligned} \right\}$$

2. Le modèle de l'atmosphère isotherme n'est pas très réaliste, on admet donc que jusqu'à une altitude de 10 km, la température de l'air dépend de l'altitude z selon la loi : $T = T_0(1 - \alpha z)$ avec $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$.

2.a. Quelle est la variation d'altitude pour laquelle la température diminue de 1°C ?

2.b. Montrer que la pression s'écrit $P = P_0(1 - \alpha z)^\beta$, exprimer β . En déduire l'altitude h pour laquelle la pression est égale à $P_0/2$. Comparer à H .

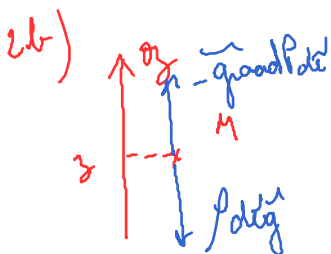
2.c. Montrer que la masse volumique s'écrit $\rho = \rho_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$.



$$T(z) = T_0 - \underbrace{\alpha T_0}_{\text{pente} < 0} z$$

$$\text{pente} = -\alpha T_0 = \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

$$\Delta z = \frac{\Delta T}{-\alpha T_0} = \frac{-1}{-2,5 \cdot 10^{-5} \times 293} \approx 100 \text{ m}$$



La particule fluide de volume dV de masse $dm = \rho dV$

est à l'équilibre de R galiléen

$$\vec{0} = \rho dV \vec{g} - \text{grad } P dV \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{PM}{RT_0(1 - \alpha z)}$$

On doit résoudre : $\frac{dP}{dz} = - \frac{PMg}{RT_0(1-\alpha z)}$

on trouve la solution par la séparation des variables :

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = - \frac{Mg}{RT_0} \int_{z=0}^z \frac{dz(-\alpha)}{(1-\alpha z)} \times \frac{1}{\alpha}$$

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = + \frac{Mg}{RT_0 \alpha} \left[\ln(1-\alpha z) \right]_0^z = \left(\frac{Mg}{RT_0 \alpha} \ln(1-\alpha z) \right)$$

$$\boxed{\frac{P(z)}{P_0} = (1-\alpha z)^\beta} \quad \text{avec } \beta = \frac{Mg}{\alpha RT_0}$$

$$P(z=h) = \frac{P_0}{2} = (1-\alpha h)^\beta P_0 \Rightarrow (1-\alpha h)^\beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\alpha h = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{h = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\beta} \right) \frac{1}{\alpha}}$$

$$2c. \quad \rho = \frac{PM}{RT} = \frac{P_0(1-\alpha z)^\beta M}{RT_0(1-\alpha z)} = \underbrace{\frac{P_0 M}{RT_0}}_{\rho_0} (1-\alpha z)^{\beta-1}$$