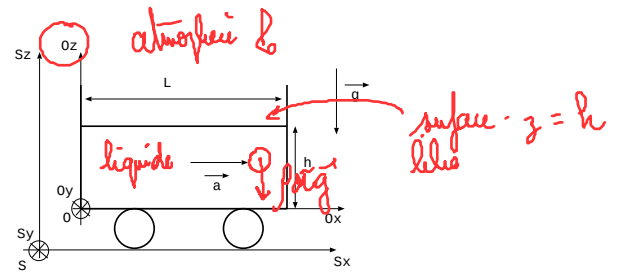


I. Fluide incompressible dans un chariot

Un chariot au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen, contient une hauteur h d'un fluide incompressible de masse volumique ρ . Ce chariot est mis en mouvement et acquiert un mouvement rectiligne uniformément accéléré (on note $\vec{a} = a\vec{e}_x$ son accélération). On cherche à décrire l'allure de la surface libre du fluide.



On note $\mathcal{R}(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le référentiel fixe lié au sol et supposé galiléen. On note $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le référentiel mobile lié au chariot.

1) On applique la PFD à une particule fluide de volume dV de masse $dm = \rho dV$ dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\vec{0} = \underbrace{\rho dV \vec{g}}_{\text{poids}} - \underbrace{\vec{\nabla} \phi dV}_{\text{pression}} \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(équation)

sur ϕ_x : $0 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \phi$ ne dépend pas de x

sur ϕ_y : $0 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow$ " " pas de y

sur ϕ_z : $0 = -\rho dV g - \frac{\partial \phi}{\partial z} dV \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\phi}{dz} = -\rho g$ d'où $\phi(z) = -\rho g z + A$

C.L., surface libre : $\phi(z=h) = \phi_0 = -\rho g h + A$

d'où $\boxed{\phi(z) = -\rho g z + \rho g h + \phi_0}$

2) le liquide à l'équilibre dans le chariot



(la somme des forces est nulle donc la résultante des forces de pression est opposée à $d\vec{F}_{ie}$)

3) Le fluide est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$ lié au chariot
 $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}'$ non galiléen
 Une particule fluide de volume dV , de masse ρdV est à l'équilibre de $\mathcal{R}'$:

$$\vec{0} = \underbrace{\rho dV \vec{g}}_{\text{poids}} - \underbrace{\vec{\nabla} \phi dV}_{\text{pression}} - \underbrace{\rho dV \vec{a}}_{\text{force d'inertie d'entraînement}} \quad \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

équilibre

$\vec{g} = -g \vec{e}_z$ $\vec{a}(O'/\mathcal{R}) = a \vec{e}_x$

$$\text{sur } (Ox): 0 = 0 - \frac{\partial p}{\partial x} dx - \rho g dz \rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a}$$

$$\text{sur } (Oy): 0 = 0 - \frac{\partial p}{\partial y} dy + 0 \rightarrow p \text{ ne dépend pas de } y$$

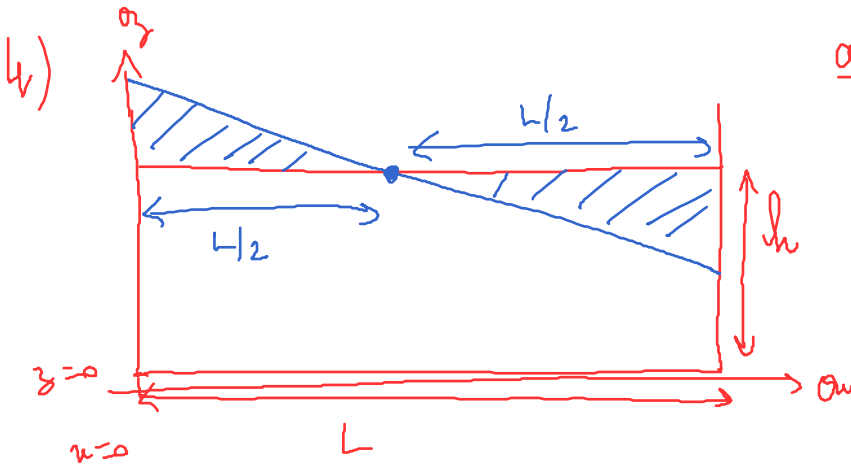
$$\text{sur } (Oz): 0 = -\rho g dz - \frac{\partial p}{\partial z} dz + 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g}$$

On part de $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a$: on intègre / à x avec z cette : $\leftarrow$ la cette d'intégration peut dépendre de z
 on dérive / à x avec z cette $p(x, z) = -\rho a x + f(z)$

$$\text{On a: } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-\rho a x) + \frac{\partial}{\partial z} (f(z)) = f'(z) = -\rho g$$

d'où $f(z) = -\rho g z + A \leftarrow$ cette indépendante de x car $f(z)$ ne dépend pas de x

$$\boxed{p(x, z) = -\rho a x - \rho g z + A}$$



astuce: ici la conservation de la masse nous permet d'écrire que le point $(x = L/2, z = h)$ ne bouge pas quand on met le chéminé en contact car ce point reste en contact avec l'atmosphère, il est à la pression p_0

$$p(x = L/2, z = h) = p_0 = -\rho a L/2 - \rho g h + A \Rightarrow A = \dots$$

5) La surface libre est définie par l'ensemble des points $M_s(x_s, z_s)$

$$\text{tels que } p(x_s, z_s) = \boxed{p_0 = -\rho a x_s - \rho g z_s + p_0 + \rho a L/2 + \rho g h}$$

éq. de la surface libre