**Programme de colle S10**

## Cours de mécanique des fluides

**1.** Pour une vitesse d'écoulement donnée, il faut savoir calculer l'accélération particulaire, la divergence et le rotationnel de la vitesse et conclure sur le mouvement des particules fluide.

Pour les écoulements en coordonnées cartésiennes, les élèves doivent savoir exprimer la divergence, le rotationnel et le Laplacien.

Pour les écoulements en coordonnées sphériques ou cylindriques, les expressions de la divergence, du rotationnel et du Laplacien sont données dans les énoncés.

**2.** On donne la vitesse d'écoulement d'un fluide dans un cylindre d'axe $Oz$ et de rayon $R$: $\overrightarrow{v} = v_0(1-\frac{r}{R})\overrightarrow{e_z}$. Exprimer le débit volumique à travers la section du cylindre. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

**3.** On donne la vitesse d'un écoulement dans une canalisation d'axe $Ox$ de section carrée comprise entre $y=0$ et $y=a$ puis $z=0$ et $z=a$: $\overrightarrow{v} = ky^2\overrightarrow{e_x}$. Exprimer le débit volumique à travers la section du cylindre. En déduire la vitesse moyenne du fluide.

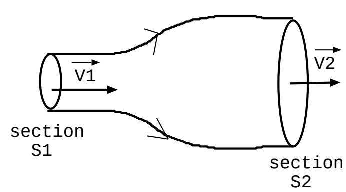
**4.** Ecrire l'équation de conservation de la masse et la démontrer en considérant un système élémentaire de section $S$ compris entre $x$ et $x+dx$ tel que le vecteur densité de courant de masse s'écrit $\overrightarrow{j} = j(x)\overrightarrow{e_x}$.

**5.** Définir la notion d'écoulement incompressible. Préciser la condition nécessaire pour laquelle un gaz est en écoulement incompressible. Démontrer l'équation locale caractéristique d'un écoulement incompressible. On donne : $\mathrm{div}(\mathrm{f}\overrightarrow{A}) = \mathrm{f}\mathrm{div}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{f}$.

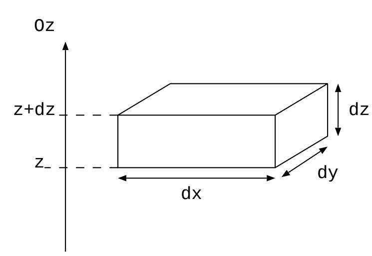
**6.** Définit la notion d'écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses. Préciser l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses pour un écoulement incompressible et irrotationnel.

**7.** On rappelle le théorème d'Ostrogradsky: le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue à tout le volume intérieur à la surface fermée soit: $\oiint \overrightarrow{A}(M).dS\overrightarrow{n}(M) = \iiint \mathrm{div}\overrightarrow{A}(P)d\tau(P)$

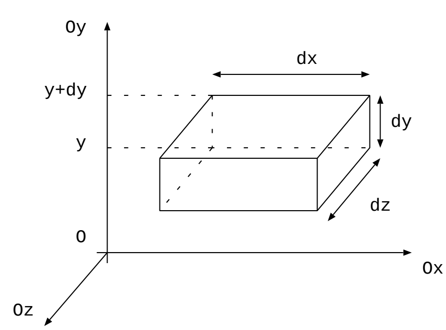
On considère un tube de courant dont l'allure est donnée ci-contre. Montrer que, pour un écoulement incompressible, lorsque les lignes de courant s'éloignent la vitesse diminue.




**8.** Soit une particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$. Exprimer la résultante des forces de pression exercées sur cette particule fluide pour $P = P(z)$. En déduire l'expression générale de la résultante des forces de pression exercée sur une particule fluide de volume $d\tau$.




**9.** Soit un écoulement décrit par le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x}$. On donne la force de viscosité exercée sur la couche de fluide de surface $dS$ placée en $y$ de la part du fluide au dessus d'elle: $d\overrightarrow{F_v}(y) = \eta\frac{\partial v_x(y)}{\partial y}dS\overrightarrow{e_x}$. Soit une particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$. Exprimer la résultante des forces de viscosité exercées sur cette particule fluide. En déduire l'expression générale de la résultante des forces de viscosité exercées sur le volume $d\tau$.



**10.** Ecrire l'équation de Navier-Stokes, préciser son unité et commenter chaque terme.

**11.** Soit un axe $Oz$ vertical ascendant, écrire et démontrer la RFH dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ pour $P(z=0) = P_0$:

- dans le cas d'un liquide masse volumique $\rho$

- dans le cas d'un gaz supposé parfait et isotherme de température $T_0$.

**12.** Soit un fluide en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen. Ecrire les forces subies par la particule fluide dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en translation dans le référentiel terrestre et dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en rotation dans le référentiel terrestre.

**13.** On donne $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$. Exprimer $P(r,z)$.

**14.** Définir le nombre de Reynolds et évaluer son ordre de grandeur.

**Exercices de dynamique des fluides visqueux: utilisation de l'équation de Navier Stokes.**

**Exercices de statique en référentiel non galiléen.**