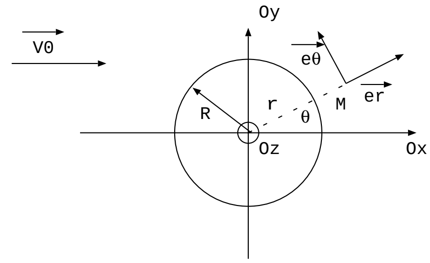
Effet Magnus

Soit un cylindre de rayon R et d'axe Oz. On étudie l'écoulement de l'air autour du cylindre. Cet écoulement est supposé incompressible, irrotationnel et stationnaire. On note ρ la masse volumique de l'air supposé constante et on néglige la viscosité de l'air. Loin du cylindre la vitesse de l'air par rapport au cylindre est $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$. On néglige la pesanteur.



En coordonnées cylindriques, on donne:

gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

divergence: $\text{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

rotationnel: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

Laplacien scalaire: $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\frac{\partial f}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

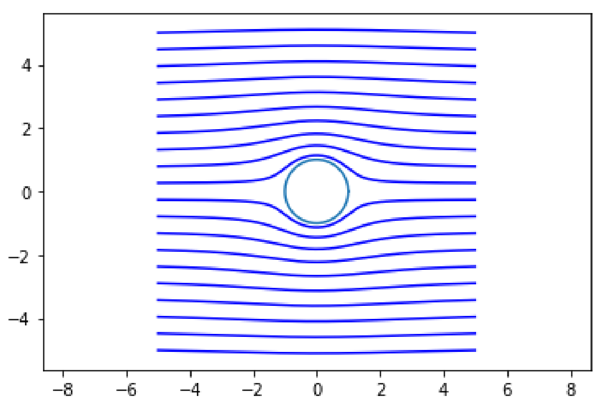
1. Préciser la vitesse du bouchon par rapport à l'air.

2. On caractérise cet écoulement par le potentiel des vitesses $\phi = Ar^n \cos\theta$. Montrer que ϕ doit vérifier l'équation $\Delta\phi = 0$. En déduire les valeurs numériques possibles pour n.

En accord avec les résultats précédents, on choisit pour le potentiel des vitesses: $\phi = (Ar + \frac{B}{r})\cos\theta$.

3. Exprimer le champ des vitesses $\overrightarrow{v}(r,\theta)$ et déduire des conditions aux limites loin du cylindre et sur le cylindre pour un fluide parfait, les expressions des constantes A et B.

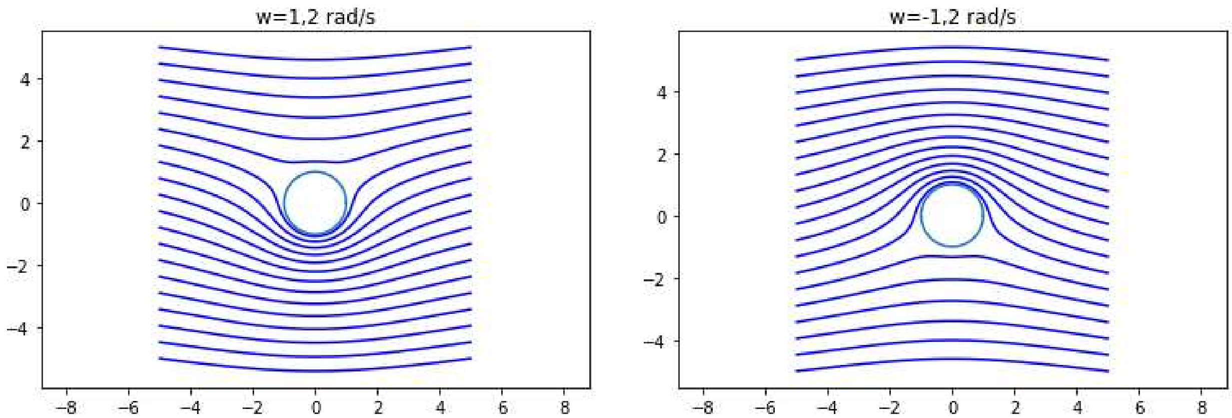
4. On donne les lignes de courant autour du cylindre. Déduire des lignes de courant et sans calcul, les valeurs de θ pour lesquelles la vitesse du fluide au voisinage du cylindre est maximale et les valeurs de θ pour lesquelles la vitesse du fluide est minimale en justifiant la réponse. Vérifier que c'est cohérent avec l'expression du champ de vitesse $\overrightarrow{v}(r = R, \theta)$.



5. On donne $(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{A}^2)$. Ecrire l'équation de Navier Stokes et la simplifier avec les hypothèses données pour cet écoulement, en déduire que $P + \frac{\rho v^2}{2}$ est une grandeur constante dans tout le fluide. Que peut-on dire de la pression aux points où la vitesse est minimale? où la vitesse est maximale?

6. Déduire du fait que la grandeur $P + \frac{\rho v^2}{2}$ est constante dans tout le fluide que la pression sur le cylindre s'écrit $P(r = R, \theta) = P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)$. Vérifier la cohérence avec les résultats de la question précédente au sujet des pressions aux points de vitesse maximale ou minimale. Justifier le fait que la résultante des forces de pression exercées sur le cylindre est nulle.

7. Le cylindre est mis en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz. Le vecteur rotation est $\omega\overrightarrow{e_z}$. On donne les lignes de courant pour $\omega = +1,2\ rad/s$ et $\omega = -1,2\ rad/s$. Déduire de l'allure des lignes de courant (sans calcul), la direction de la résultante des forces de pression exercées sur le cylindre dans chaque cas.



Etudier l'écoulement de l'air à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ autour du cylindre revient à étudier le mouvement du cylindre dans l'air.

Ajouter sur les deux schémas: la vitesse du cylindre par rapport à l'air, le sens de rotation du cylindre et la résultante des forces de pression sur le cylindre. En déduire l'allure de la trajectoire du cylindre par rapport à l'air.