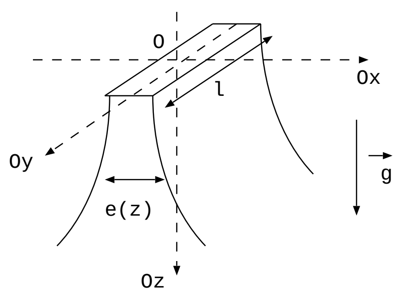
Drainage gravitaire d'un film d'eau savonneuse

On forme un film plan sur un cadre rectangulaire vertical, dont la largeur est l selon Oy. A l'instant $t = 0$, l'épaisseur du film fraichement formé est supposée uniforme sur toute la surface du film et est notée e_0 telle que $e_0 << l$.

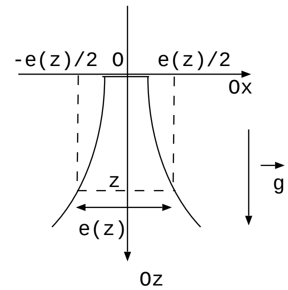
Dans cette étude, on cherche à rendre compte de l'amincissement progressif du film, dû au drainage gravitaire. Nous considérons ici que le seul rôle des forces de tension superficielle est de rigidifier les interfaces qui limitent le film, **les interfaces eau savonneuse-air se comportent donc comme des parois rigides.** La masse volumique ρ de l'eau savonneuse est supposée invariable, la viscosité est notée η.

On note Oz l'axe vertical, orienté par un vecteur unitaire descendant $\overrightarrow{e_z}$. On note Ox l'axe horizontal normal au plan du film de savon. Le point O est au sommet du film, au milieu du cadre rectangulaire. On suppose le régime stationnaire établi. L'épaisseur du film, $e(z)$, est une fonction de z et en négligeant les effets de bord, on suppose que le vecteur vitesse des particules de fluide est de la forme $\overrightarrow{v} = v(x,z)\overrightarrow{e_z}$. L'interface film-air est supposée quasi-verticale.

Vue en perspective en 3D



Vue de côté



1. Montrer que la vitesse est indépendante de z.

2. On admet que la pression dans le film est uniforme et vaut P_0. Déduire de l'équation de Navier Stokes que le champ de vitesse est de la forme $\overrightarrow{V} = K(\frac{e^2}{4} - x^2)\overrightarrow{e_z}$. Exprimer K en fonction de ρ, η et g (champ de pesanteur terrestre).

3. Montrer que le débit volumique à la côte z est $D_v = \frac{l\rho g e^3}{12\eta}$.

On considère maintenant que l'épaisseur du film est variable dans le temps soit $e = e(z,t)$ et on admet que le débit volumique garde la même expression $D_v(z,t) = \frac{l\rho g e^3(z,t)}{12\eta}$.

4. On considère le système fixe et ouvert compris entre les côtés z et $z+dz$. Exprimer, en utilisant $D_v(z,t)$, la masse δm_e qui entre dans ce système entre t et $t+dt$. Exprimer, en utilisant $D_v(z+dz,t)$, la masse δm_s qui sort de ce système entre t et $t+dt$. Exprimer la masse $m(t)$ présente dans le système à l'instant t et la masse $m(t+dt)$ présente dans le système à l'instant $t+dt$. Déduire de la conservation de la masse que $l\frac{\partial e}{\partial t}(z,t) = -\frac{\partial D_v}{\partial z}(z,t)$. En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(z,t)$ (on rappelle que $\frac{df(z)^n}{dz} = nf(z)^{n-1}f'(z)$).

5. Montrer qu'une solution $e(z,t)$ de la forme $e(z,t) = \alpha\sqrt{\frac{z}{t}}$ convient. Exprimer α en fonction de η, ρ et g.

6. A un instant donné $t > 0$, montrer que la zone amincie d'épaisseur inférieure à e_0 s'étend jusqu'à une valeur limite de z notée z_l à exprimer en fonction de η, ρ, g, t et e_0.

7. Tracer l'allure du film de savon vu de profil pour deux instants t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$ et tels qu'à t_1, z_l vaut à peu près $e_0/10$ et à t_2, z_l vaut $5e_0$.