TD nombre de Reynolds

I. **Force de trainée**

On considère une sphère de rayon R, de vitesse v, en mouvement uniforme dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ.

1. La force de trainée exercée par le fluide sur la sphère a pour expression $F = \dfrac{\pi}{2} C_x(\mathcal{R}_e) R^\alpha v^\gamma \rho^\lambda$ où C_x est un coefficient sans dimension et α, γ et λ sont des entiers naturels. Déterminer α, γ et λ par une analyse dimensionnelle.

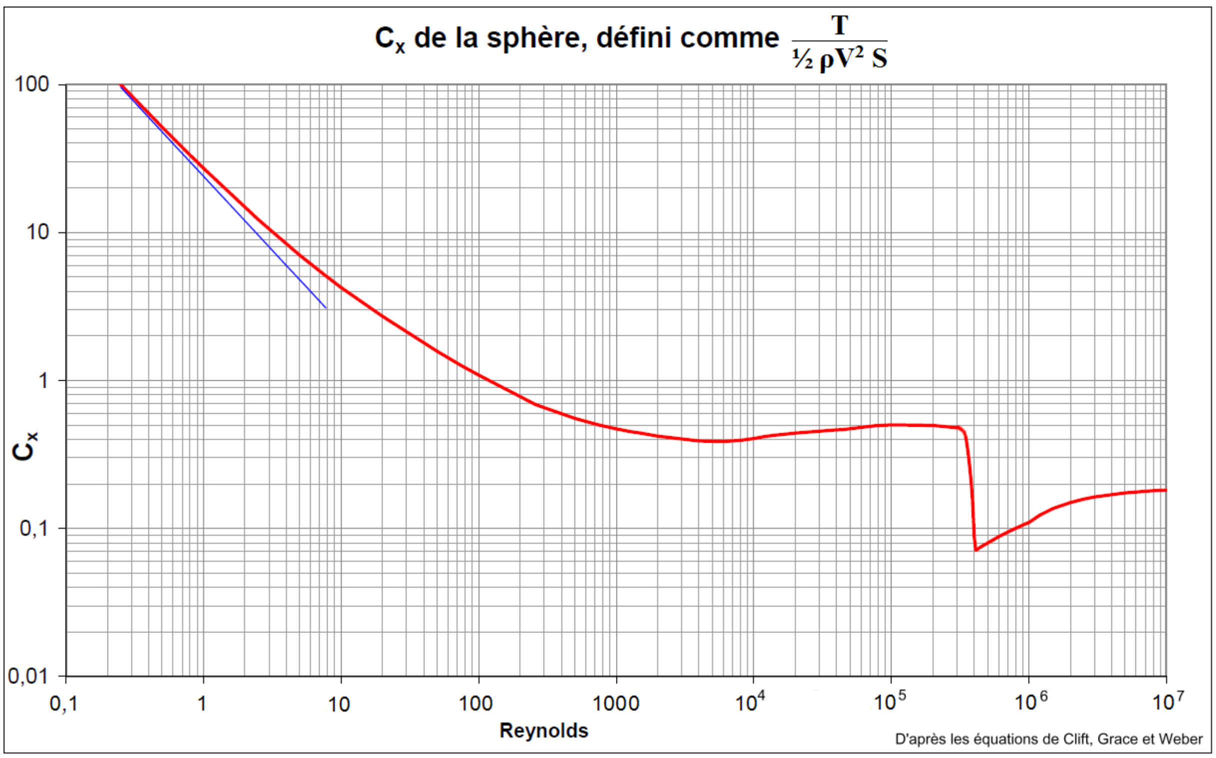
2. Pour un écoulement laminaire ($\mathcal{R}_e < 1$), la loi de Stokes donne l'expression de la force de trainée soit $\overrightarrow{F} = -6\pi R\eta\overrightarrow{v}$. Exprimer dans ce cas, C_x en fonction de $\mathcal{R}_e$.

3. Que devient cette force pour un fluide parfait?

Réponses : $C_x = \dfrac{24}{\mathcal{R}_e}$

II. **Mouvement d'une sphère dans un fluide**

On donne la courbe représentant le coefficient de traînée C_x en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ, de viscosité η, autour d'une sphère de rayon R. On note Re le nombre de Reynolds de l'écoulement du fluide autour de cette sphère. On rappelle l'expression de la force de traînée $F = \dfrac{1}{2}\rho S C_x v^2$.



On étudie ici l'écoulement de l'eau autour d'une bactérie. La bactérie de rayon $R = 100\ \mu m$ se déplace à la vitesse $v = 2\ mm.s^{-1}$ dans l'eau liquide de viscosité $\eta = 10^{-3}\ Pa.s$.

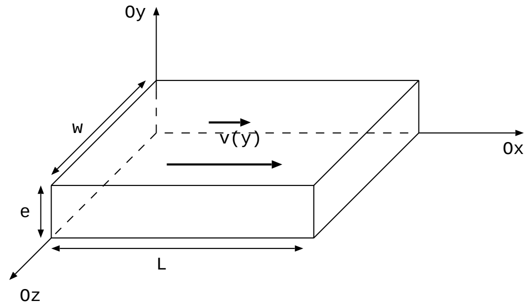
1. Estimer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du l'eau autour de la bactérie.

2. Préciser la particularité de la courbe donnant $\log C_x$ en fonction de $\log Re$ dans le domaine des valeurs du nombre de Reynolds trouvé pour la bactérie. En déduire l'expression de C_x en fonction de Re puis l'expression de la force de traînée dans ce domaine.

Réponses : 1- $Re = 0,4$ *2-* $C_x = \dfrac{24}{Re}$ *et* $F = 6\pi R\eta v$

III. **Simplification de l'équation de Navier-Stokes**

Un polymère fondu s'écoule dans un moule selon la direction Ox entre deux plaques parallèles situées en $y = \pm e/2$. L'écoulement est provoqué par une différence de pression $\Delta P = P(x = 0) - P(x = L) > 0$. On note ρ et η, la masse volumique et la viscosité du polymère fondu et $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_x}$. Données: $L = 1,2\ m$, $w = 0,6\ m$, $e = 12\ mm$, $\Delta P = 2.10^7\ Pa$, $\rho = 910\ kg.m^{-3}$ et $\eta = 500\ Pl$.



Le frottement entre deux couches de fluide voisines se traduit par une force tangentielle de viscosité parallèle à la direction de l'écoulement dont la norme s'écrit $F_{vis} = \eta S \dfrac{\partial v}{\partial y}$, S étant la surface de contact entre le couches de fluide.

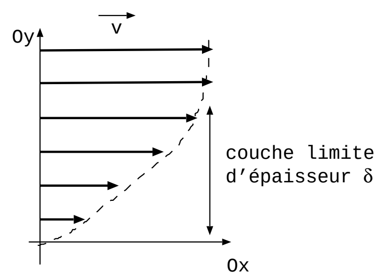
1. Exprimer l'intensité de la force de pesanteur dF_g et l'intensité de la force de viscosité dF_{vis} exercées sur un élément de volume $dxdydz$ de fluide. Evaluer le rapport $\dfrac{dF_g}{dF_{vis}}$ pour une vitesse de l'ordre du $m.s^{-1}$. Conclure.

2. Exprimer l'intensité de la force de pression dF_p exercée sur un élément de volume $dxdydz$ de fluide. Evaluer le rapport $\dfrac{dF_g}{dF_p}$. Conclure.

3. En déduire l'équation de Navier Stokes en tenant compte des résultats précédents.

IV. **Couche limite**

En dehors de la couche limite, l'écoulement est celui d'un fluide parfait. Dans la couche limite, on observe de forts gradients de vitesses qui résultent de la viscosité du fluide. On considère que l'écoulement dans la couche limite est unidirectionnel dans la direction $\overrightarrow{e_x}$ et que la vitesse ne dépend que du temps et de la coordonnée y dans la direction perpendiculaire à l'écoulement soit $\overrightarrow{v} = v(y,t)\overrightarrow{e_x}$. On note δ l'épaisseur de la couche limite, ρ et η respectivement la masse volumique et la viscosité du fluide.



Dans cette section, on néglige les effets de la pesanteur, les gradients de pression sont considérés nuls et l'écoulement est instationnaire.

1. Déduire de l'équation de Navier-Stokes que le vecteur vitesse vérifie une équation de diffusion, exprimer le coefficient de diffusion D en fonction de ρ et η.

2. Exprimer les temps caractéristiques τ_{diff} et τ_{conv} de diffusion et de convection de quantité de mouvement. Montrer que le nombre de Reynolds R_e peut être interprété comme un rapport de ces deux grandeurs. Commenter.

3. En exprimant le fait que, dans la couche limite, le temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur la distance δ est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de convection sur la distance L, montrer que la dimension transversale caractéristique de la couche limite est, en ordre de grandeur, donnée par $\delta = \dfrac{L}{\sqrt{Re}}$.