Correction DM 7

1. On suppose que les dimensions selon Oy et Oz sont grandes devant la dimension selon Ox, il y a donc diffusion uniquement selon Ox.

2. L'équation de diffusion thermique s'écrit $\Delta T = \frac{\rho c_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$. Ici $T = T(x,t)$ donc $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ d'où à résoudre $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c_p}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$.

3. La température est continue donc les conditions aux limites s'écrivent $T(t, x = 0) = T_{int}$ et $T(t, x = L) = T_{ext}$. Les conditions initiales sont $T(t = 0, x = 0) = T_{int}$ et $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$.

4. En régime permanent, on a $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc l'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ soit $T(x) = Ax + B$ avec $T(x = 0) = T_{int} = B$ et $T(x = L) = T_{ext} = AL + B$ d'où $A = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L}$. On a donc $T(x) = \frac{T_{ext} - T_{int}}{L}x + T_{int}$.

5. Par analogie avec l'électricité et la loi d'Ohm: $U = V_1 - V_2 = Ri$ où $V_1 - V_2$ est la différence de potentiel qui met en mouvement les charges (i est un débit de charges), on définit la résistance thermique par $Rth = \frac{T_1 - T_2}{P_{th}}$ où $T_1 - T_2$ est la différence de température à l'origine du transfert thermique (la puissance thermique P_{th} est un débit de transfert thermique).

La puissance thermique s'écrit $P_{th} = j_{th}S$ où $j_{th} = -\lambda\frac{dT}{dx} = -\lambda\frac{T_{ext} - T_{int}}{L}$ d'après la loi de Fourier.

Soit $R_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{\lambda\frac{T_{ext} - T_{int}}{L}S} = \frac{L}{\lambda S}$ d'où la résistance thermique surfacique $r_{th} = \frac{R_{th}}{S} = \frac{L}{\lambda}$.

Une grande résistance thermique signifie que le matériau s'oppose au passage du transfert thermique ce qui est vérifié ici puisque la résistance thermique est d'autant plus grande que l'épaisseur du matériau est grande et que sa conductivité thermique est faible: matériau isolant).

6. AN: $L = \lambda r_{th} = 0,037.3,15 = 12\ cm$.

7. La diffusivité thermique s'écrit $k_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$.

8. On a $L = N_x dx$ soit $dx = \frac{L}{N_x}$ et $x_i = idx = \frac{iL}{N_x}$.

9. $T(t + dt, x) = T(t, x) + dt\frac{\partial T}{\partial t}$ DL du premier ordre en dt.

$T(t, x - dx) = T(t, x) - dx\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \frac{dx^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$ et $T(t, x + dx) = T(t, x) + dx\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \frac{dx^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$ DL du second ordre en dx.

10. On fait la somme $T(t, x-dx)+T(t, x+dx) = 2T(t, x)+dx^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ d'où $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{T(t, x - dx) + T(t, x + dx) - 2T(t, x)}{dx^2}$.

11. On a $\frac{\partial T}{\partial t}(t_n, x_i) = \frac{T(t_n + dt, x_i) - T(t_n, x_i)}{dt} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt}$

On a $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t_n, x_i) = \frac{T(t_n, x_i - dx) + T(t_n, x_i + dx) - 2T(t_n, x_i)}{dx^2} = \frac{T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - 2T_i^n}{dx^2}$

12. En remplaçant dans l'équation de diffusion on a donc $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{dt} = k_{th}\frac{T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - 2T_i^n}{dx^2}$ soit $T_i^{n+1} = T_i^n + k_{th}dt\frac{T_{i-1}^n + T_{i+1}^n - 2T_i^n}{dx^2}$.

13. $K = Lambda/Rho/Cp$

14. L'équation 2 fait intervenir $i - 1$ et $i + 1$ donc elle n'est valable que pour $i \geq 1$ et $i \leq N_x - 1$ (il faut exclure les premier et dernier terme $i = 0$ et $i = N_x$).

15. $dx = L/N_x$ et $dt = t_{max}/N_t$.

16. $Temp[0, 0] = T_{int}$ (c'est la température à $t = 0$ en $x = 0$)

for i in range(1,$N_x + 1$):

——$Temp[0, i] = T_{ext}$ (la température initiale pour $x > 0$ est T_{ext})

for n in range(1,$N_t + 1$):

——$Temp[n, 0] = T_{int}$ (la température en $x = 0$ à tout instant est T_{int})

——$Temp[n, N_x] = T_{ext}$ (la température en $x = N_x dx = L$ à tout instant est T_{ext})

17. Dans la récurrence, on connaît tous les éléments de la colonne $Temp[0, i]$, on veut donc compléter les colonnes $Temp[1, i]$, $Temp[2, i]$...

for n in range(1,$N_t + 1$): # ici n prend pour première valeur 1 donc dans la récurrence on calcule $Temp[n, i]$ en fonction des $Temp[n - 1, i]$

——for i in range(1,$N_x + 1$):

————$Temp[n, i] = (Temp[n-1, i-1]+Temp[n-1, i+1]-2*Temp[n-1, i])*K*dt/dx**2+Temp[n-1, i]$

ou

for n in range(0,N_t): # ici n prend pour première valeur 0 donc dans la récurrence on calcule $Temp[n+1, i]$ en fonction des $Temp[n, i]$

——for i in range(1,$N_x + 1$):

————$Temp[n + 1, i] = (Temp[n, i - 1] + Temp[n, i + 1] - 2 * Temp[n, i]) * K * dt/dx * *2 + Temp[n, i]$

18. A l'instant initial, la température est T_{ext} dans tout le composite sauf en $x = 0$, c'est la courbe 3 pour $t = 0\ s$.

En régime permanent la température est une fonction affine de la position dans le composite, c'est la courbe 2 pour $t = 18\ 000\ s$ (d'après la question Q4)

Plus le temps augmente plus on se rapproche du régime permanent, plus la température augmente dans le matériau isolant, soit la courbe 1 correspond à $t = 6\ 000\ s$ et la courbe 4 correspond à $t = 12\ 000\ s$.

19. Le régime permanent est atteint puisque la courbe 2 est une fonction affine de la position (question Q4).