

1) On a un écoulement incompressible (ce qui est le cas pour tous les liquides et les gaz avec une densité inférieure à celle de l'eau) :
 $\text{div } \vec{v} = 0$ soit ici $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ donc v ne dépend pas de z

2) L'équation de Navier-Stokes s'écrit,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v}$$

régime stationnaire car $\ell \gg b$ uniforme

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v(n) \frac{d}{dn} \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v(n) \frac{\partial}{\partial z} (v(n) \vec{e}_z) = 0$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v(n) \vec{e}_z = \frac{d^2 v}{dn^2} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{g} = g \vec{e}_z$$

D'où en projection sur (Oz) : $0 = +\rho g + \eta \frac{d^2 v}{dn^2}$

$$\text{soit} \quad \frac{d^2 v}{dn^2} = -\frac{\rho g}{\eta}$$

$$\frac{dv}{dn} = -\frac{\rho g n}{\eta} + A$$

$$v = -\frac{\rho g n^2}{2\eta} + An + B$$

Les interfaces sont assimilées à des parois rigides, le fluide adhère aux parois donc $v(x = \frac{e}{2}) = v(x = -\frac{e}{2}) = 0$

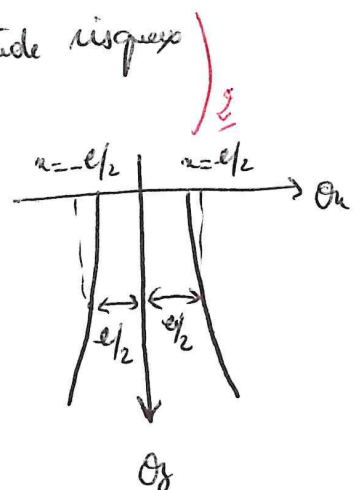
$$\text{soit} \quad v\left(\frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho g e^2}{8\eta} + A \frac{e}{2} + B = 0 \quad (1)$$

$$v\left(-\frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho g e^2}{8\eta} - A \frac{e}{2} + B = 0 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow A e = 0 \quad \text{soit} \quad A = 0$$

$$(1) + (2) \Rightarrow -\frac{\rho g e^2}{4\eta} + B = 0 \quad \text{soit} \quad B = \frac{\rho g e^2}{4\eta}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\vec{v}(n) = \frac{\rho g}{2\eta} \left(\frac{e^2}{4} - n^2 \right) \vec{e}_z}$$



d'après l'énoncé

$$\boxed{K = \frac{\rho g}{2\eta}}$$

$$3) \quad D_v = \iint V_x \, dS$$

la vitesse est selon (Oz) donc on intègre
sur une surface élémentaire $\perp$ à (Oz)
soit $dS = dx \, dy$

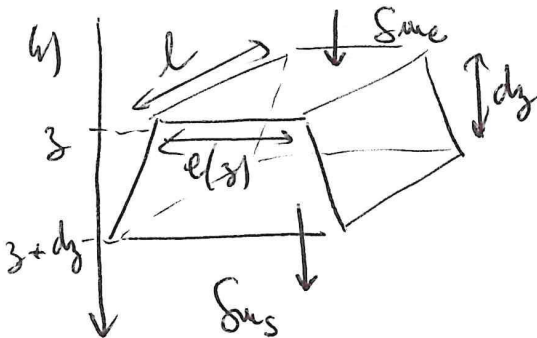
2/3

$$\begin{aligned} D_v &= K \iint \left(\frac{e^2}{4} - x^2 \right) dx \, dy \\ &= K \int_0^l dy \int_{-e/2}^{e/2} \left(\frac{e^2}{4} - x^2 \right) dx \\ &= K l \left[\frac{e^2}{4} x - \frac{x^3}{3} \right]_{-e/2}^{e/2} \\ &= K l \left[\frac{e^2}{4} \left(\frac{e}{2} - \left(-\frac{e}{2} \right) \right) - \left(\frac{e^3}{3 \times 8} - \left(-\frac{e^3}{3 \times 8} \right) \right) \right] \\ &= K l \left(\frac{e^3}{4} - \frac{e^3}{3 \times 4} \right) \end{aligned}$$

3

$$D_v = \frac{K l e^3}{6}$$

$$D_v = \frac{\rho g l e^3}{12 \eta}$$



$S_{me} = \int D_v(z, t) \, dt$: masse qui entre en z

$S_{ms} = \int D_v(z+dz, t) \, dt$: masse qui sort en $z+dz$

$m(t) = \rho \times \underbrace{l \times e(z, t)}_{\text{volume d'un parallélépipède}} \, dz$: masse présente à t

$m(t+dt) = \int l e(z, t+dt) \, dz$: masse présente à $t+dt$

La conservation de la masse s'écrit :

$$m(t+dt) = m(t) + S_{me} - S_{ms}$$

$$\int l e(z, t+dt) \, dz - \int l e(z, t) \, dz = + \int D_v(z, t) \, dt - \int D_v(z+dz, t) \, dt$$

$$\cancel{\int l \, dz} \frac{\partial e}{\partial t}(z, t) \, dt = - \int \frac{\partial D_v}{\partial z}(z, t) \, dt \, dz$$

$$\text{soit } \left[l \frac{\partial e}{\partial t}(z, t) = - \frac{\partial D_v}{\partial z}(z, t) \right]$$

$$D_v(z, t) = \frac{\rho g l e^3(z, t)}{12 \eta}$$

$$\text{soit } \frac{\partial D_v}{\partial z} = \frac{\rho g l}{12 \eta} 3 e^2(z, t) \frac{\partial e}{\partial z} \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\rho g e^2}{4 \eta} \frac{\partial e}{\partial z} \right]$$

$$5) \quad e = \alpha \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} = \alpha \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z} \sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \alpha \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{t}^3}$$

soit en remplaçant dans l'équation précédente:

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \alpha \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{t}^3} = -\frac{\rho g}{4\eta} \alpha^2 \frac{z}{t} \alpha \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z} \sqrt{t}}$$

après simplification il vient: $\alpha^2 = \frac{4\eta}{\rho g}$ soit $\alpha = \sqrt{\frac{4\eta}{\rho g}}$

3

6) On cherche z telle que $e(z, t) < e_0$

$$\text{soit } \alpha \sqrt{\frac{z}{t}} < e_0$$

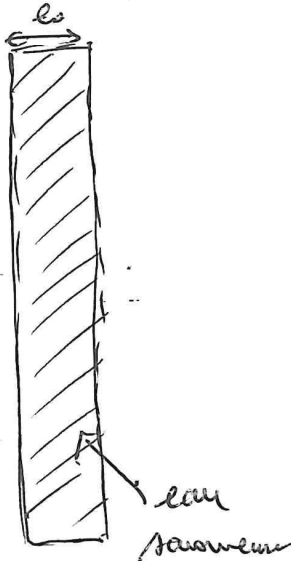
$$\text{donc } \sqrt{z} < \frac{e_0}{\alpha} \sqrt{t} \text{ ou encore } z < \frac{e_0^2 t}{\alpha^2} = ze$$

donc $ze = \frac{e_0^2 \rho g t}{4\eta}$

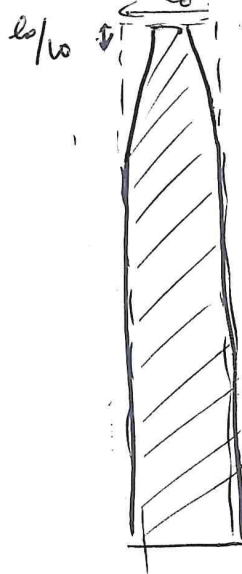
2

7) pour $t=0$:

3



pour $t=t_1$
pour $ze = e_0/10$



pour $t=t_2$
pour $ze = 5e_0$



l'aire de la partie hachurée doit être constante car la masse d'eau saumâtre est toujours la même donc le volume occupé aussi.