

Proposition de corrigé

Ce corrigé à été rédigé conjointement par David Lasne et Jean Maysonnave. N'hésitez pas à nous signaler par mail (david.lasne@wanadoo.fr ou jmaysonnave@yahoo.fr) toute coquille ou erreur !

Voici par ailleurs quelques imperfections repérées dans l'énoncé de cette épreuve :

Q9 : un traitement mathématique de cette question nécessitait l'expression du gradient en coordonnées cylindriques, non donnée dans l'énoncé, bien que non exigible au programme.

Q10 : le formalisme de la question est un peu ambigu. La force notée $\vec{f}_{v,visc}$ correspond au terme $\eta\Delta\vec{v}$ mais ce n'est pas explicité de manière claire dans l'énoncé. Ce choix de notation prête aussi un peu à confusion car elle pourrait être identifiée, à tort, avec la force notée \vec{f}_{vol} introduite à la question 7.

Q14 et Q15 : la résolution se fait facilement en utilisant la notion de différenciation, qui n'est plus explicitement un outil mathématique associé au programme, au moins en physique.

Q33 : il y a une petite incohérence dans l'énoncé : celui-ci fournit la valeur de r_0 , sans doute pour simplifier et trouver plus rapidement E_0 , mais on demande d'exprimer E_0 en fonction de h , ce qui signifie qu'il faut quand même faire le calcul complet... On propose donc ici la version "courte" (sans h) puis la version complète.

Q34 : Question un peu floue : il est question de tableaux non présentés : en fournir un exemple aurait été préférable, ou alors ne pas en parler... Quelle est l'évolution ? Doit-on la trouver, ou simplement la justifier ?... Est-il fait référence à l'effet d'écrantage ?

Q39 : La notation R est déjà utilisée pour la constante de RYDBERG dans le même problème, même s'il y a peu de risque de confusion.

1 / La circulation sanguine

I. Généralités

Q1. Le volume de sang mis en circulation chaque seconde est de 80 cm^3 , donc chaque minute un volume de $60 \times 80 = 4800 \text{ cm}^3 = 4.8 \text{ L}$, proche de 5 L , circule dans le corps d'un adulte.

Q2. La puissance mécanique de la partie droite, pour faire circuler le sang dans les poumons, est $P_d = 0.2 \text{ W}$ d'après l'énoncé. La partie gauche développe quant à elle un travail (de force de pression) $W = p \cdot \Delta V = 16 \cdot 10^3 * 80 \cdot 10^{-6} \approx 1,3 \text{ J}$ en une seconde pour envoyer le sang dans le corps, ce qui correspond à une puissance $P_g = 1,3 \text{ W}$. La puissance totale est donc $P_{tot} = 1,48 \text{ W}$. Si on divise par la masse du cœur ($m = 0,3 \text{ kg}$), on obtient une puissance massique de $5 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$, ce qui correspond à la valeur indiquée.

Q3. Les 90 % d'énergie restants servent à alimenter le muscle, c'est à dire à maintenir/développer les tissus qui le constituent, et à permettre leur fonctionnement. Une partie est également dissipée sous forme thermique, pour maintenir le corps à 37°C .

Q4. D'après la figure 2, on peut extraire la dépendance $\log(N) = 10 + p \times \log(a)$ avec $p = -\frac{10}{3.74}$, pente de la droite représentative des données. Cette expression peut se réécrire $\log\left(\frac{N}{a^p}\right) = 10$. On obtient ainsi :

$$N = 10^{10} a^{-10/3.74}$$

Q5. Le débit volumique D_v s'exprime selon $D_v = v_{\text{moy}} S_{\text{artère}}$ dans l'artère aorte. Avec $D_v = 80 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $S_{\text{artère}} = \pi a^2$:

$$v_{\text{moy}} = \frac{D_v}{S_{\text{artère}}} = \frac{80 \cdot 10^{-6}}{\pi \times (5 \cdot 10^{-3})^2} = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

II. Loi de Poiseuille

Q6. L'introduction de pressions différentes en A et B est cohérent avec une bonne description de l'effet du cœur, qui en imposant une différence de pression, met le sang en mouvement.

Q7.

- $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: accélération volumique locale d'une particule de fluide. Elle traduit le changement de vitesse d'une particule de fluide, dû au caractère non stationnaire de l'écoulement.

- $\rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$: accélération volumique convective d'une particule de fluide. Ce terme traduit la variation de vitesse de la particule de fluide induite par une inhomogénéité spatiale du champ des vitesses.
- $-\text{grad} p$: résultante volumique des forces de pressions exercées par le fluide.
- $\eta \Delta \vec{v}$: résultante volumique des forces de viscosité.
- \vec{f}_{vol} : autres forces volumiques (par exemple la contribution du poids).

Q8. L'écoulement est considéré laminaire si le nombre de REYNOLDS $Re = \frac{Lv\rho}{\eta}$ est inférieur à 1. Ici, $L = a = 5 \cdot 10^{-3}$ m, $v \sim 1$ m.s⁻¹, $\rho = 10^3$ kg.m⁻³ et $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, d'où :

$$Re = \frac{5 \cdot 10^{-3} \times 1 \times 10^3}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^3 \gg 1$$

L'écoulement du sang ne peut pas être considéré comme laminaire (on considère en général qu'il faut $Re \lesssim 2000$) dans l'artère aorte. Il faut noter que ce résultat n'est pas du tout généralisable à l'ensemble du système sanguin, constitué de manière très majoritaire de vaisseaux bien plus petits (tableau 1), pour lesquels le nombre de REYNOLDS est bien plus faible, ce qui peut justifier la suite de l'étude.

Q9. On peut se placer en coordonnées cylindriques (r, θ, x) . On a :

$$- \vec{v} \text{ ne dépend pas de } t, \text{ donc } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$- (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$$

$$- \vec{f}_{\text{vol}} = \vec{0} \text{ car tout autre force que la résultante des forces de pression et de viscosité est négligée}$$

Ainsi, l'équation de NAVIER-STOKES se réécrit de manière simplifiée selon :

$$\text{grad} p = \eta \Delta \vec{v}$$

Remarque : l'expression du gradient en cylindrique manque dans l'énoncé pour calculer le terme convectif. Cependant, l'énoncé impose une forme d'écoulement particulière, en cisaillement : $\vec{v}(M) = v(r)\vec{e}_x$. C'est donc, de fait, un écoulement laminaire, pour lequel le terme convectif peut être négligé (il est en fait même nul, ce qui est un peu contradictoire avec la valeur du nombre de REYNOLDS trouvé...).

Q10. On a :

$$d\vec{F}_+ = \eta \frac{dv}{dr} (r+dr) \Sigma(r+dr) \vec{e}_x$$

$$d\vec{F}_- = -\eta \frac{dv}{dr} (r) \Sigma(r) \vec{e}_x$$

d'où

$$d\vec{F}_{\text{visc}} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_- = \eta \left[\frac{dv}{dr} (r+dr) \Sigma(r+dr) - \frac{dv}{dr} (r) \Sigma(r) \right] \vec{e}_x = \eta \frac{d}{dr} \left[\frac{dv}{dr} (r) \Sigma(r) \right] dr \vec{e}_x$$

or $\Sigma(r) = r d\theta dx$, d'où : $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{d}{dr} \left[\frac{dv}{dr} (r) r \right] dr d\theta dx \vec{e}_x$. Or le volume de la tranche de fluide prise entre les rayons r et $r+dr$ est $d\tau = r d\theta dr dx$, d'où l'expression de la force volumique de viscosité :

$$\vec{f}_{v,\text{visc}} = \frac{d\vec{F}_{\text{visc}}}{d\tau} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{dv}{dr} \right\} \vec{e}_x$$

Q11. La pression ne dépend pas de la variable θ car il y a une invariance par rotation autour de l'axe \vec{e}_x , donc $\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x$. En reprenant l'équation de la question Q8, on aboutit à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x = \eta \Delta \vec{v}$$

soit d'après la question 10 :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{dv}{dr} \right\} \vec{e}_x$$

Les termes respectivement à droite et à gauche de l'égalité ne dépendent pas de la même variable (x et r respectivement). La seule solution possible est que chacun de ces deux termes soit égal à une même constante A ce qui induit

$$\frac{dp}{dx} = A \tag{1}$$

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = A \tag{2}$$

D'après l'équation (1), A correspond au taux d'accroissement de la pression par unité de longueur et s'exprime donc d'après les données selon $A = \frac{P_B - P_A}{L}$. On en déduit avec $P(x=0) = P_A$ et $P(x=L) = P_B$:

$$P(x) = P_A + \frac{P_B - P_A}{L} x$$

L'équation (2) conduit quant à elle successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) &= \frac{A}{\eta} r \\ r \frac{dv}{dr} &= \frac{A}{2\eta} r^2 + B \\ \frac{dv}{dr} &= \frac{A}{2\eta} r + \frac{B}{r} \\ v(r) &= \frac{A}{4\eta} r^2 + B \ln(r) + C \end{aligned}$$

B ne peut être que nul sinon $v(r)$ diverge quand $r \rightarrow 0$, ce qui est absurde. De plus, l'écoulement est visqueux, donc la composante tangentielle du champ des vitesses s'annule sur les parois, soit $v(r=a) = 0$ ce qui entraîne $C = -\frac{A}{4\eta} a^2$. Ainsi, $v(r) = \frac{A}{4\eta} (r^2 - a^2)$, soit en reprenant l'expression de A :

$$v(r) = \frac{P_A - P_B}{4\eta L} (a^2 - r^2)$$

Q12. Le débit volumique s'exprime comme $D_v = \iint_{\text{section}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$ ("section" désigne ici la section du vaisseau). On a $\vec{v} = v(r)\vec{e}_x$ et $d\vec{S} = r d\theta dr \vec{e}_x$, ainsi :

$$\begin{aligned} D_v &= \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} v(r) r d\theta dr \\ &= 2\pi \frac{(P_A - P_B)}{4\eta L} \int_{r=0}^a (a^2 r - r^3) dr \\ &= \frac{(P_A - P_B)\pi}{2\eta L} \left(a^2 \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right) \end{aligned}$$

soit

$$D_v = \frac{(P_A - P_B)\pi a^4}{8\eta L}$$

En électrocinétique, la tension U pour un conducteur ohmique vérifie $U = V_A - V_B = R_{\text{elec}} i$, où i est un débit de charge. Par analogie on peut poser ici $P_A - P_B = R_H D_v$, d'où :

$$R_H = \frac{P_A - P_B}{D_v} = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$$

Q13. La figure 3 permet de constater que le système sanguin correspond à une association de résistances hydrauliques en série et en parallèle, et plus précisément à un système de (N_a artères en parallèle, chacune de résistance R_a) mis en série avec un système de (N_c artères en parallèle, chacune de résistance R_c). On a ainsi $R_{\text{tot}} = \frac{R_a}{N_a} + \frac{R_c}{N_c}$ avec $R_a = \frac{8\eta L_a}{\pi r_a^4}$ et $R_c = \frac{8\eta L_c}{\pi r_c^4}$.

Soit :

$$R_{\text{tot}} = \frac{8\eta}{\pi} \left\{ \frac{L_a}{N_a r_a^4} + \frac{L_c}{N_c r_c^4} \right\}$$

ce qui correspond bien à l'expression donnée dans l'énoncé.

III. Loi de Murray

Q14. On a tout d'abord $V_0 = N_a V_a + N_c V_c$ avec V_a, V_c , volumes de tissu dû aux parois des artères et des capillaires respectivement. V_a correspond donc au volume compris entre deux cylindres de même axe, de longueur L_a et de rayons respectifs r_a et $r_a + e$. Ainsi $V_a \sim 2\pi r_a e L_a = 2\pi \alpha r_a^2 L_a$ (dans la mesure où $e \ll r_a$). De même $V_c \sim 2\pi \alpha r_c^2 L_c$, soit :

$$V_0 = 2\pi \alpha \{ N_a L_a r_a^2 + N_c L_c r_c^2 \}$$

Différencions l'expression ci-dessus, soit $dV_0 = 2\pi\alpha \{2N_a L_a r_a dr_a + 2N_c L_c r_c dr_c\}$. On cherche un minimum de V_0 , qui se traduit par $dV_0 = 0$, de sorte que :

$$\frac{dr_c}{dr_a} = -\frac{N_a L_a r_a}{N_c L_c r_c}$$

Q15. Une minimisation de la résistance totale correspond de même à $dR_{\text{tot}} = 0$ soit $\frac{8\eta}{\pi} \left\{ \frac{L_a}{N_a} \frac{(-4)}{r_a^5} dr_a + \frac{L_c}{N_c} \frac{(-4)}{r_c^5} dr_c \right\} = 0$ d'où :

$$\frac{dr_c}{dr_a} = -\frac{N_c L_c}{N_a L_a} \left(\frac{r_c}{r_a} \right)^5$$

En utilisant maintenant le résultat obtenu à la question précédente, on aboutit à :

$$\frac{N_c}{N_a} = \left(\frac{r_a}{r_c} \right)^3$$

Q16. Cette question est très ouverte et nous proposons ici une possibilité, sans doute parmi d'autres interprétations possibles. Pour plus de détails sur la question on peut se reporter à <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2695432/>

Ici, on trouve donc la dépendance $N \propto a^{-3}$ alors qu'on a $N \propto a^{-2.7}$ d'après la question Q4. Le nombre de vaisseaux sanguins réel semble plus élevé que celui attendu en théorie. Les hypothèses du modèle permettant d'aboutir au résultat de la question Q15 pourraient donc être reconsidérés, par exemple :

- le rôle de la pesanteur a été négligé alors qu'elle a bien sûr un effet ;
- la résistance a été calculée en considérant uniquement une géométrie cylindrique. Cette géométrie n'est pas rigoureusement représentative de la réalité, les vaisseaux se coudent, n'ont pas des sections uniformes... De même, α n'est certainement pas uniforme dans tout le système. Pour les petits vaisseaux par exemple, la membrane pourra représenter une plus grande proportion car on atteint la taille minimum des cellules qui la compose (typiquement, une cellule est de l'ordre du micron) ;
- le caractère non newtonien supposé du sang dans les calculs menés auparavant est sans doute discutable
- comme $Re \gg 1$, l'écoulement n'est sans doute pas un simple écoulement de cisaillement.

En particulier, on peut supposer assez raisonnablement qu'en raison de la géométrie réelle, la résistance totale R_H est plus élevée que celle que nous proposons. Or nous avons vu $R_H = \frac{P_A - P_B}{D_v}$. La différence de pression $P_A - P_B$ est fixée par le cœur. Une augmentation de R_H se traduit donc par une diminution de D_v . pour "compenser" cet effet, un nombre plus élevé de vaisseaux permettrait de maintenir un débit en sang suffisant pour alimenter tous les tissus.

IV. Le rôle de l'élasticité des vaisseaux

Q17. Si jamais le flux sanguin varie de manière brutale ou inattendue (caillot par exemple), l'élasticité des artères permet de modifier la valeur du rayon a et ainsi de changer radicalement la valeur du débit volumique (dépendance en a^4).

Q18. L'équation d'EULER est :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}P}}{\rho} + \frac{\vec{f}_{\text{vol}}}{\rho}$$

ici $\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{0}$ (pas de forces en dehors de la résultante des forces de pression) soit $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}P}}{\rho}$ ou encore :

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x &= -\frac{\partial (P_0 + \tilde{P})}{\partial x} \vec{e}_x \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \tilde{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \end{aligned}$$

De gauche à droite, les termes sont respectivement d'ordre 1, d'ordre 2 et d'ordre 1. D'où, en supprimant le terme d'ordre 2 (méthode similaire à l'approximation acoustique faite en cours pour les ondes sonores) :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}$$

Q19. On a d'une part $m(t+dt) - m(t) = \frac{\partial m}{\partial t} dt$. Or $m(x,t) = \rho(x,t)A(x,t)dx$ donc :

$$m(t+dt) - m(t) = \frac{\partial(A\rho)}{\partial t} dx dt$$

Par ailleurs :

$$m(t+dt) - m(t) = \rho(x,t)A(x,t)v(x,t)dt - \rho(x+dx,t)A(x+dx,t)v(x+dx,t)dt = -\frac{\partial(\rho Av)}{\partial x} dx dt$$