1) $\vec{V}_{\text{bouchon/air}} = -\vec{v_0}$

2) L'écoulement est incompressible donc $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

" " irrotationnel donc il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$

d'où $\boxed{\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi) = \Delta \phi = 0}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(n A r^{n-1} - \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(n A r^{n} - \frac{B}{r} \right) \cos\theta \right] = \left(n^2 A r^{n-1} + \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta$$

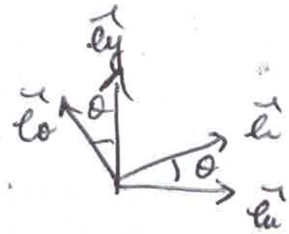
$$\Delta \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(A r^{n} + \frac{B}{r} \right)(-\cos\theta)$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(n^2 A r^{n-2} + \frac{B}{r^3} \right) \cos\theta - \left(A r^{n-2} + \frac{B}{r^3} \right) \cos\theta = 0$$

soit $A r^{n-2}(n^2 - 1) = 0$ d'où $\boxed{n = 1}$ et $\boxed{n = -1}$

3) On applique $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e_z}$

soit $\boxed{\vec{v} = \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta\, \vec{e_r} - \left(A + \frac{B}{r^2} \right) \sin\theta\, \vec{e_\theta}}$



Les conditions aux limites sont :

loin du cylindre $\vec{V}(r \to \infty) = v_0 \vec{e_x} = v_0 \left(\cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_\theta} \right)$

or $\vec{v}(r \to \infty) = A \cos\theta\, \vec{e_r} - A \sin\theta\, \vec{e_\theta}$

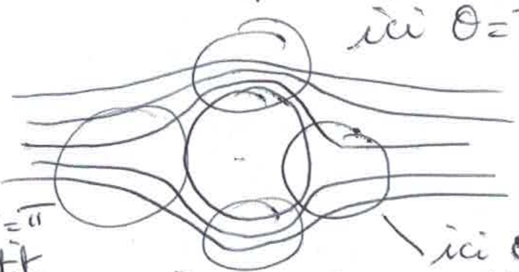
d'où $\boxed{A = v_0}$

sur le cylindre le fluide glisse sur le cylindre donc la vitesse est tangente au cylindre soit $v_r(r = R) = 0$

or $\vec{v}(r = R) = \underbrace{\left(A - \frac{B}{R^2} \right) \cos\theta}_{v_r(r=R)}\, \vec{e_r} - \left(A + \frac{B}{R^2} \right) \sin\theta\, \vec{e_\theta}$

$v_r(r = R) = \left(A - \frac{B}{R^2} \right) \cos\theta = 0$ donc $\boxed{B = AR^2 = v_0 R^2}$

4) Pour un écoulement incompressible, lorsque les lignes de courant se rapprochent, $v \nearrow$.



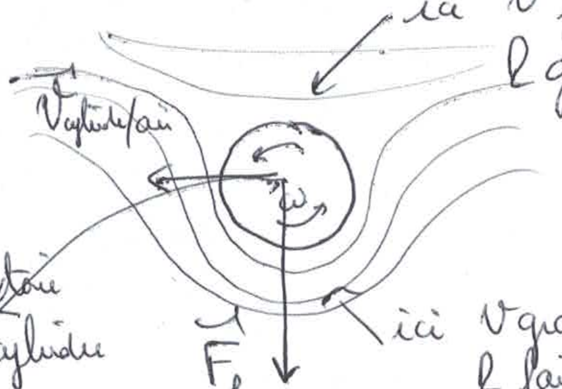
$$\vec{v}(r,\theta) = v_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} - \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)v_0 \sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

au bord du cylindre : $r = R$

$$\vec{v}(R,\theta) = -2v_0 \sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$\|\vec{v}(R,\theta)\| = 2v_0|\sin\theta|$ maximal pour $\theta = \pi/2$ et $3\pi/2$
minimal pour $\theta = 0$ et π

7) $\omega > 0$ $\odot\vec{\omega}$



la force de pression est dirigée des fortes vers les faibles pressions

5) L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\,\vec{v}\right] = \underbrace{\cancel{\rho\vec{g}}}_{=\vec{0}} - \vec{\text{grad}}\,P + \underbrace{\cancel{\eta\,\Delta\vec{v}}}_{=\vec{0}}$$

écoulement stationnaire — poids négligé — fluide parfait

$$\rho\left[\underbrace{\vec{\text{rot}}\,\vec{v}}_{=\vec{0}}\wedge\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\text{grad}}\,v^2\right] = -\vec{\text{grad}}\,P$$

écoulement irrotationnel

d'où $\vec{\text{grad}}\left(\rho\frac{v^2}{2} + P\right) = \vec{0}$

soit $\boxed{\rho\frac{v^2}{2} + P = \text{cste}}$

6) La quantité $\rho\frac{v^2}{2} + P$ a la même valeur loin du cylindre où $P = P_0$ et $v = v_0$ et sur le cylindre où $P = P(r,\theta)$ et $\vec{v} = \vec{v}(r=R,\theta) = -v_0\left(1+\frac{R^2}{R^2}\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta} = -2v_0\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\rho\frac{v_0^2}{2} + P_0 = P(r,\theta) + \rho\frac{v_0^2}{2}\,4\sin^2\theta$$

d'où $\boxed{P(r,\theta) = P_0 + \rho\frac{v_0^2}{2}\left(1-4\sin^2\theta\right)}$

P est maximale pour $\sin^2\theta = 0$ soit $\theta = 0$ et π

$$\boxed{P_{max} = P_0 + \rho\frac{v_0^2}{2}}$$

P est minimale pour $\sin^2\theta = 1$ soit $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\pi/2$

$$\boxed{P_{min} = P_0 - \frac{3}{2}\rho v_0^2}$$