Programme de colle S11

Cours de mécanique des fluides

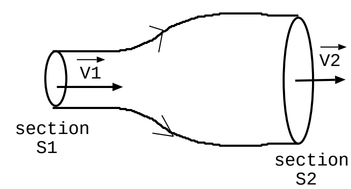
1. Ecrire l'équation de conservation de la masse et la démontrer en considérant un système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$ tel que le vecteur densité de courant de masse s'écrit $\overrightarrow{j} = j(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

2. Définir la notion d'écoulement incompressible. Préciser la condition nécessaire pour laquelle un gaz est en écoulement incompressible. Démontrer l'équation locale caractéristique d'un écoulement incompressible. On donne : $\mathrm{div}(\mathrm{f}\overrightarrow{A}) = \mathrm{f}\mathrm{div}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{f}$.

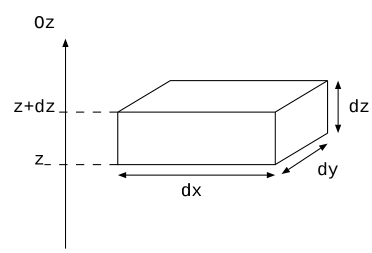
3. Définit la notion d'écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses. Préciser l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses pour un écoulement incompressible et irrotationnel.

4. On rappelle le théorème d'Ostrogradsky: le flux sortant d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale triple de sa divergence étendue à tout le volume intérieur à la surface fermée soit: $\oiint \overrightarrow{A}(M).dS\overrightarrow{n}(M) = \iiint \mathrm{div}\overrightarrow{A}(P)d\tau(P)$

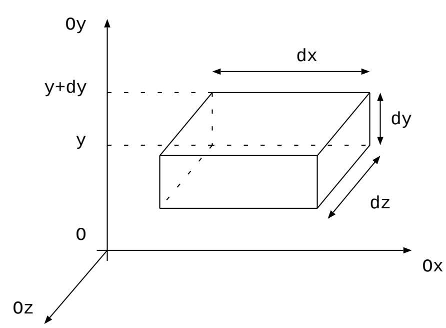
On considère un tube de courant dont l'allure est donnée ci-contre. Montrer que, pour un écoulement incompressible, lorsque les lignes de courant s'éloignent la vitesse diminue.



5. Soit une particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$. Exprimer la résultante des forces de pression exercées sur cette particule fluide pour $P = P(z)$. En déduire l'expression générale de la résultante des forces de pression exercée sur une particule fluide de volume $d\tau$.



6. Soit un écoulement décrit par le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x}$. On donne la force de viscosité exercée sur la couche de fluide de surface dS placée en y de la part du fluide au dessus d'elle: $d\overrightarrow{F_v}(y) = \eta\dfrac{\partial v_x(y)}{\partial y}dS\overrightarrow{e_x}$. Soit une particule fluide de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$. Exprimer la résultante des forces de viscosité exercées sur cette particule fluide. En déduire l'expression générale de la résultante des forces de viscosité exercées sur le volume $d\tau$.

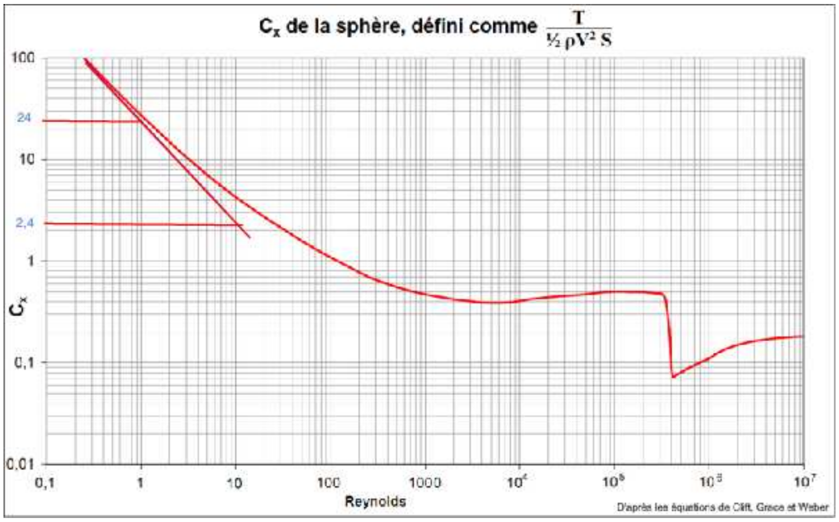


7. Ecrire l'équation de Navier-Stokes, préciser son unité et commenter chaque terme.

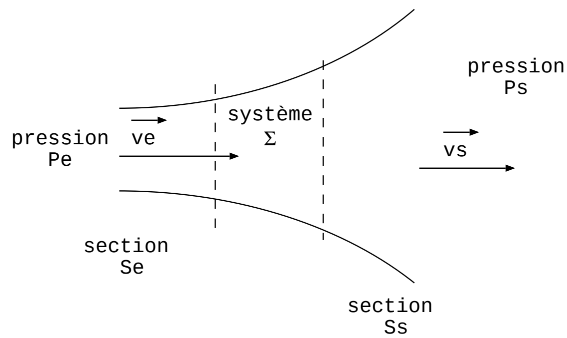
8. Définir le nombre de Reynolds et évaluer son ordre de grandeur.

9. On donne $(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{A} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\overrightarrow{A}^2)$. Enoncer et démontrer la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses (pour un écoulement non irrotationnel). Préciser le sens physique de cette relation.

10. Utiliser la courbe donnant le coefficient de traînée autour d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds pour montrer que la force de traînée pour des petits nombres de Reynolds s'écrit (en norme) $F = 6\pi R\eta v$ où η est la viscosité du fluide, R le rayon de la sphère et v la vitesse de l'écoulement.



11. Soit un fluide en écoulement, on définit un volume de contrôle entre deux parois fictives fixes. Ce volume de contrôle constitue le système ouvert Σ. On note δm_e et δm_s les masses entrante et sortante de Σ entre t et $t + dt$, respectivement aux vitesses $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{v_s}$. On se place en régime stationnaire.



11.a. Montrer, en utilisant le système ouvert Σ, que les débits massiques à l'entrée et à la sortie sont égaux.

11.b. Définir le système fermé $\Sigma^*(t)$ et $\Sigma^*(t + dt)$ et montrer que les débits massiques en entrée et en sortie sont égaux.

11.c. Exprimer $\dfrac{d\overrightarrow{p_{\Sigma^*}}}{dt}$.

11.d. Exprimer $\dfrac{dE_{m,\Sigma^*}}{dt}$.

11.e. Enoncer la loi de la quantité de mouvement et le théorème de la puissance mécanique.

11.f. Sur le système représenté, déduire de la loi de la quantité de mouvement l'expression de la force exercée par la canalisation sur le fluide supposé parfait.

11.g. Sur le système représenté, appliquer le théorème de la puissance mécanique (le fluide est supposé parfait).

Tout exercice de mécanique des fluides parfaits et visqueux.

Exercices de statique en référentiel non galiléen.