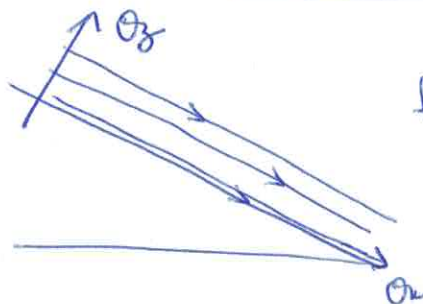


1-



les lignes de courant sont des droites parallèles à (Oxy)

On calcule : $\text{div } \vec{v} = \frac{v_x}{x} + \frac{v_y}{y} + \frac{v_z}{z} = \frac{\partial v(z)}{\partial x} = 0$

ici $v_x = v(z)$ $v_y = v_z = 0$

La même propriété est bien compatible avec un écoulement incompressible ($\text{div } \vec{v} = 0$) et stationnaire ($\vec{v}$ ne dépend pas de t)

2- $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ avec $\vec{v} \cdot \text{grad} = v(z) \frac{\partial}{\partial x}$

$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v(z) \frac{\partial}{\partial x} (v(z) \vec{e}_x) = 0$

$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (v(z) \vec{e}_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (v(z) \vec{e}_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (v(z) \vec{e}_x)}{\partial z^2} = \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \vec{e}_x$

$\vec{g} = g(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$ $\text{grad } L = \frac{dL}{dz} \vec{e}_z$

d'où $\vec{0} = \rho g(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) - \frac{dL}{dz} \vec{e}_z + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \vec{e}_x$

en projection sur (Ox) : $0 = \rho g \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2}$ soit $\boxed{\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} = -k \sin \alpha}$

sur (Oz) : $0 = -\rho g \cos \alpha - \frac{dL}{dz}$ soit $\boxed{\frac{dL}{dz} = -\rho g \cos \alpha}$ soit $\boxed{k = \frac{\rho g}{\eta}}$

3- donc $L(z) = -\rho g \cos \alpha z + A$

Condition aux limites : $L(z=h) = L_0 = -\rho g \cos \alpha h + A$

d'où $\boxed{L(z) = -\rho g \cos \alpha (z-h) + L_0}$

4- On a : $\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta}$ après intégration : $\frac{dv}{dz} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} z + B$

et $v(z) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z^2 + Bz + C$

Condition aux limites : $v(z=0) = A = 0$

$\frac{dv}{dz}(z=h) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} h + B = 0 \Rightarrow B = \frac{\rho g \sin \alpha h}{\eta}$

donc $v(z) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z^2 + \frac{\rho g \sin \alpha h}{\eta} z$

ou encore $\boxed{v(z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (2hz - z^2) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z (2h - z)}$

par identification : $\boxed{\beta = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta}}$

5- La vitesse est maximale pour $\frac{dv}{dz} = 0$ c'est le cas en $z = h$ (surface libre)

donc $\boxed{v_{\max} = v(z=h) = \beta h (2h - h) = \beta h^2}$ AN: $v_{\max} = 1,1 \text{ mms}^{-1}$

6- On calcule le débit volumique à travers une section perpendiculaire à $\vec{v}$ soit une section dans le plan Oyz .

$$D_v = \int v dS = \int \beta z (2h - z) dy dz$$

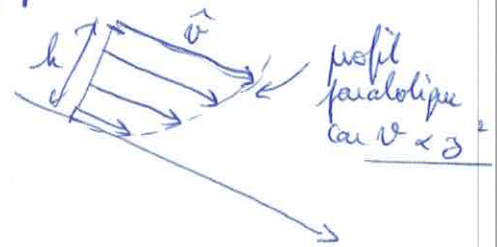
$$= \beta \int_0^h z (2h - z) dz \times \int_0^w dy$$

$$= \beta \left[hz^2 - \frac{z^3}{3} \right]_0^h \times w$$

$$= \beta \left(h^3 - \frac{h^3}{3} \right) w$$

soit $\boxed{D_v = \frac{\beta h^3 w^2}{3} = \langle v \rangle h w}$

donc la vitesse moyenne est : $\boxed{\langle v \rangle = \beta \frac{2h^2}{3} = \frac{2}{3} v_{\max}}$ AN: $\langle v \rangle = 0,7 \text{ mms}^{-1}$



7- Le nombre de Reynolds est le rapport du terme convectif sur le terme diffusif

soit $Re = \frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v}\|}{\eta \Delta \vec{v}} = \frac{\rho v h}{\eta}$

AN: $Re = \frac{14 \cdot 10^3 \times 0,7 \cdot 10^{-3} \times 3 \cdot 10^{-3}}{10} = 29 \cdot 10^{-4} \ll 1$ l'écoulement est donc laminaire (les effets diffusifs l'emportent).

