Correction DS 6 de physique

I. Correction: centrifuge

1. Le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen car il est en rotation dans $\mathcal{R}$.

Une particule fluide de masse $dm = \rho d\tau$ subit dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

- le poids qui est négligé ici
- la résultante des forces de pression $d\overrightarrow{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau$
- la force d'inertie d'entraînement $d\overrightarrow{F}_{ie} = \rho d\tau\omega^2 r\overrightarrow{e_r}$
- la force de Coriolis est nulle car la particule fluide est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$.

La particule fluide est à l'équilibre dans $\mathcal{R}'$ soit: $d\overrightarrow{F}_p + d\overrightarrow{F}_{ie} = \overrightarrow{0}$ ou encore $\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho\omega^2 r\overrightarrow{e_r}$.

2. En projetant sur $\overrightarrow{e_\theta}$ et sur $\overrightarrow{e_z}$, on trouve $\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$ donc la pression ne dépend ni de z, ni de θ.

En projetant sur $\overrightarrow{e_r}$, on a $\dfrac{dP}{dr} = \rho\omega^2 r$ où $\rho = \dfrac{PM_0}{RT}$ car le gaz est supposé parfait.

Soit à résoudre $\dfrac{dP}{dr} = \dfrac{PM_0\omega^2 r}{RT}$. En séparant les variables on obtient: $\dfrac{dP}{P} = \dfrac{M_0\omega^2}{RT} r dr$.

On intègre entre $r = 0$ où $P = P(0)$ et r où $P = P(r)$:

$\displaystyle\int_{P(0)}^{P(r)} \frac{dP}{P} = \frac{M_0\omega^2}{RT}\int_0^r r dr$ soit $\ln(\dfrac{P(r)}{P(0)} = \dfrac{M_0\omega^2 r^2}{2RT}$ d'où la pression $P(r) = P(0)e^{\frac{M_0\omega^2 r^2}{2RT}}$.

3. D'après l'équation des gaz parfaits le nombre de moles par unité de volume s'écrit $\dfrac{n}{V} = \dfrac{P}{RT}$ donc le nombre de molécules par unité de volume est $N^* = \dfrac{n\mathcal{N}_a}{V} = \dfrac{P\mathcal{N}_a}{RT}$: la pression et le nombre de molécules par unité de volume sont proportionnels.

La relation sur la pression donne $N^*(r) = N^*(0)e^{\frac{M_0\omega^2 r^2}{2RT}}$.

4. La fonction f(M,T) renvoie le rapport $\dfrac{N^*(a)}{N^*(0)}$ pour une vitesse angulaire $\omega = 25\,000\ tours.min^{-1}$ et pour $a = 10\ cm$.

q_1 est donc $\dfrac{N^*(a)}{N^*(0)}$ pour l'isotope UF_6^{235} à $T = 300\ K$.

q_2 est donc $\dfrac{N^*(a)}{N^*(0)}$ pour l'isotope UF_6^{235} à $T = 400\ K$.

q_3 est donc $\dfrac{N^*(a)}{N^*(0)}$ pour l'isotope UF_6^{238} à $T = 300\ K$.

q_4 est donc $\dfrac{N^*(a)}{N^*(0)}$ pour l'isotope UF_6^{238} à $T = 400\ K$.

Plus l'isotope est lourd et plus le pourcentage d'isotopes au bord du cylindre sera grand: $q_1 < q_3$ et $q_2 < q_4$. C'est normal car c'est la force d'inertie centrifuge qui dévie les molécules vers les bords du récipient et les forces d'inertie sont proportionnelles à la masse.

Plus la température est élevée et moins la force centrifuge est efficace, la proportion de molécules au bord du récipient par rapport aux molécules au centre du récipient diminue quand la température augmente, c'est ce que traduit le fait que $q_1 > q_2$ et $q_3 > q_4$. C'est normal car il y a compétition entre l'énergie de la force centrifuge qui tend à amener les molécules vers le bord du récipient et l'énergie thermique qui tend à désordonner le système.

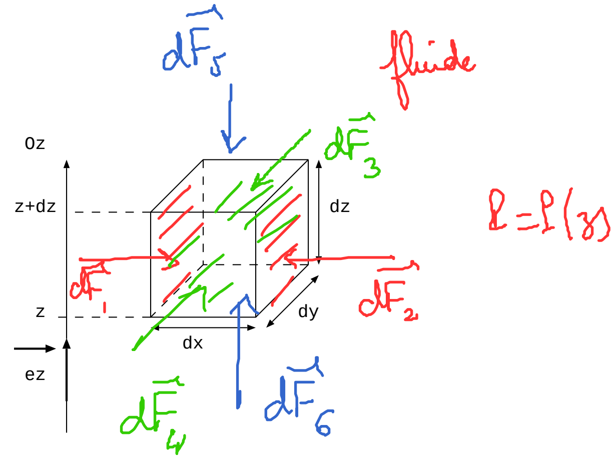
Les données permettent de mesurer τ à deux températures différentes:

à $T = 300\ K$: $\tau = \dfrac{126,01}{120,92} = 1,042$

à $T = 400\ K$: $\tau = \dfrac{37,61}{36,46} = 1,031$

Le but est de séparer les deux isotopes donc il faut travailler à basse température pour avoir un coefficient de séparation le plus grand possible.

II. Correction: girafe



1. La particule fluide subit des forces de pression sur ces 6 faces. Les forces de pression sur les faces du haut et du bas son respectivement $-P(z+dz)dxdy\vec{e_z}$ $\vec{dF_5}$ et $+P(z)dxdy\vec{e_z}$ $\vec{dF_6}$. La pression ne dépend que de z donc les forces de pression sur les autres faces se compensent deux à deux.

$\vec{dF_1} + \vec{dF_2} = \vec{0}$

$\vec{dF_3} + \vec{dF_4} = \vec{0}$

La résultante des forces de pression est donc:

$\overrightarrow{dF_p} = -(P(z+dz) - P(z))dxdy\vec{e_z} = -\frac{dP}{dz}(z)\underbrace{dxdydz}_{d\tau}\vec{e_z} = -\frac{dP}{dz}(z)d\tau\vec{e_z}$ en notant $d\tau = dxdydz$ le volume de la particule fluide.

dz petit

Lorsque la pression dépend de x, y et z, la résultante des forces de pression est $\overrightarrow{dF_p} = -(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z})d\tau = \boxed{-\overrightarrow{\text{grad}}Pd\tau. = \overrightarrow{dF_p}}$

2. Soit une particule fluide de volume $d\tau$ et de masse $dm = \rho d\tau$. Elle est à l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen sous l'action de son poids $d\vec{P} = dm\vec{g} = -\rho d\tau g\vec{e_z}$ et de la résultante des forces de pression $\overrightarrow{dF_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}Pd\tau = -(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z})d\tau$.

$\vec{g}$ Oz $\overrightarrow{dF_p}$ $dm = \rho d\tau$ $\vec{dP}$

A l'équilibre $d\vec{P} + \overrightarrow{dF_p} = \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{\text{grad}}\,P = -\rho g\vec{e_z}$

En projection sur Ox et Oy on a $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ donc la pression ne dépend ni de y ni de x.

En projection sur Oz on a $\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g < 0}$: cette relation traduit le fait que la pression diminue lorsque l'on monte.

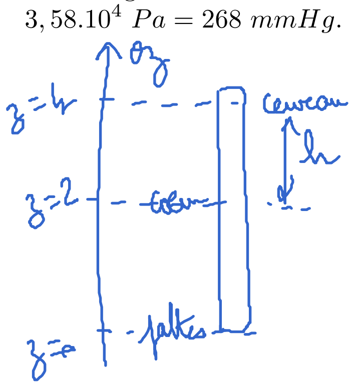
3. La masse volumique est constante donc en intégrant la RFH on a $P(z) = A - \rho g z$. On détermine A avec la condition aux limites $P(z=0) = P_0 = A$ soit $\boxed{P(z) = P_0 - \rho g z.}$

4. On a $P_{cerveau} = P_0 - \rho g z_{cerveau}$, $P_{coeur} = P_0 - \rho g z_{coeur}$ et $P_{pattes} = P_0 - \rho g z_{pattes}$. Il est à noter que l'énoncé donne la pression au niveau du cerveau mais on ne connaît pas P_0.

Pour la girafe qui se tient droite: $P_{coeur} = P_{cerveau} + \rho g(z_{cerveau} - z_{coeur}) = 100.133,3 + 1060.9,8.2 = 3,4.10^4\ Pa = 256\ mmHg$.

De même $P_{patte} = P_{cerveau} + \rho g(z_{cerveau} - z_{pattes}) = 100.133,3 + 1060.9,8.4 = 5,48.10^4\ Pa = 412\ mmHg$.

Pour la girafe en train de boire: $P_{cerveau} = P_{coeur} + \rho g(z_{coeur} - z_{cerveau}) = 175.133,3 + 1060.9,8.1,2 = 3,58.10^4\ Pa = 268\ mmHg$.

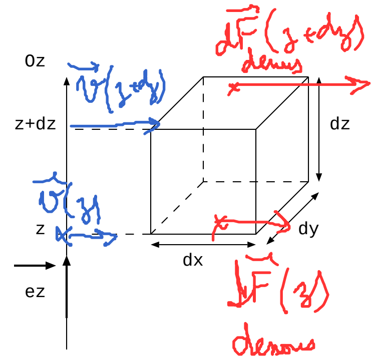


$P_{coeur} = P_{cerveau} + \rho g h$) P_{coeur} $P_{cerveau}$) en Pa

5. La particule fluide subit les forces de viscosité sur chacune des 6 faces. Sur les faces du haut et du bas les forces de viscosité s'écrivent respectivement $+\eta dxdy\frac{dv}{dz}(z+dz)\overrightarrow{e_x}$ (signe + car c'est le fluide de dessus la surface en $z+dz$ qui exerce cette force) et $-\eta dxdy\frac{dv}{dz}(z)\overrightarrow{e_x}$ (signe − car c'est le fluide de dessous la surface en z qui exerce cette force). La vitesse ne dépend pas de y et de x donc les forces de viscosité sur les autres faces se compensent deux à deux.

$\overrightarrow{dF}(z+dz)$ dessus

$\overrightarrow{dF}(z)$ dessous



fluide

$\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{e_x}$

si $\frac{dv}{dz} > 0$

La résultante des forces de viscosité est $d\overrightarrow{F_v} = +\eta dxdy(\frac{dv}{dz}(z+dz) - \frac{dv}{dz}(z))\overrightarrow{e_x} = +\eta dxdydz\frac{d^2v}{dz^2}(z)\overrightarrow{e_x} = \eta d\tau\frac{d^2\overrightarrow{v}}{dz^2}$.

si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x,y,z)$: $\overrightarrow{dF} = \eta d\tau\left[\frac{d^2\overrightarrow{v}}{dx^2} + \frac{d^2\overrightarrow{v}}{dy^2} + \frac{d^2\overrightarrow{v}}{dz^2}\right]$

On généralise cette expression et on obtient $d\overrightarrow{F_v} = \eta d\tau\Delta\overrightarrow{v}$ où $d\tau = dxdydz$, le volume de la particule fluide.

6. Le fluide s'écoule sous l'action du gradient de pression, il s'écoule des fortes vers les faibles pressions soit selon $+Oz$ pour $\Delta P = P(z=0) - P(z=L) > 0$.

7. L'équation de Navier Stokes s'écrit: $\rho(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = \rho\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$

L'équation de Navier Stokes est en $\cancel{N}/m^{-3}$.

Le terme $\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ est l'accélération de la particule fluide, composée de l'accélération locale et de l'accélération convective.

Le terme $-\overrightarrow{\text{grad}}P$ représente les forces volumiques de pression qui s'exercent sur la particule fluide de la part du fluide environnant.

Le terme $\eta\Delta\overrightarrow{v}$ représente les forces volumiques de viscosité.

Le terme $\overrightarrow{f}_v$ représente les forces volumiques autres que les forces de pression et de viscosité, par exemple des forces d'inertie en référentiel non galiléen ou des forces électrique et magnétique si les particules sont chargées et sont placées dans un champ électromagnétique.

8. On a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}} = v(r)\overrightarrow{e_z}.(\frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}) = v(r)\frac{d}{dz}$ soit $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v(r)\frac{d}{dz}(v(r)\overrightarrow{e_z}) = \overrightarrow{0}$.

On est en régime stationnaire donc $\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.

$\text{grad}\, P = \eta\Delta\overrightarrow{v} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\overrightarrow{e_z}$

De plus il n'y a pas d'autres forces que les forces de pression et de viscosité (le poids est négligé) donc $-\overrightarrow{\text{grad}}P + \frac{\eta}{r}\frac{\partial(r\frac{\partial v}{\partial r})}{\partial r}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$.

9. En projection sur $\overrightarrow{e_r}$ et sur $\overrightarrow{e_\theta}$, on obtient $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ donc P ne dépend pas de r et $\frac{\partial P}{\partial\theta} = 0$ donc P ne dépend pas de θ.

10. On admet que $\frac{dP}{dz} = C$ est une constante donc $P(z) = Cz+B$ avec $P(z=0) = B$ et $P(z=L) = CL+B$ donc $C = \frac{P(z=L) - P(z=0)}{L}$ d'où $\boxed{\frac{dP}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}}$.

On projette l'équation de Navier Stokes sur Oz soit $\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r}\frac{d(r\frac{dV}{dr})}{dr} = -\frac{\Delta P}{L}$.

On a donc $\frac{d}{dr}(r\frac{dv}{dr}) = -\frac{\Delta Pr}{\eta L}$.

Soit par intégration par rapport à r, il vient $r\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta Pr^2}{2\eta L} + C_1$

puis on divise par r: $\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{\Delta P r}{2\eta L} + \dfrac{C_1}{r}$.

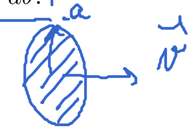
Par une deuxième intégration on a $v(r) = -\dfrac{\Delta P r^2}{4\eta L} + C_1 \ln r + C_2$. $r \leq a$

On doit avoir $C_1 = 0$ car ce terme diverge en $r = 0$ et la vitesse doit être définie en $r = 0$ sur l'axe du tuyau.

C.L. De plus le fluide est visqueux donc il s'accroche aux parois soit $v(r = a) = 0 = -\dfrac{\Delta P a^2}{4\eta L} + C_2$ d'où $C_2 = \dfrac{\Delta P a^2}{4\eta L}$.

On a donc $v(r) = \dfrac{\Delta P}{4\eta L}(a^2 - r^2)$.

11. Le débit volumique à travers la section du tuyau s'écrit $\boxed{D_v = \iint v(M)dS}$. Un point M sur le disque de rayon a à travers lequel passe le fluide, est repéré par les coordonnées r et θ, on a donc $\boxed{dS = dr.rd\theta}$.



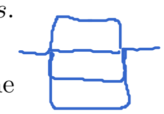
Donc $D_v = \dfrac{\Delta P}{4\eta L}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=a} (a^2 - r^2) r dr = \dfrac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi [\dfrac{a^2 r^2}{2} - \dfrac{r^4}{4}]_0^a = \dfrac{\Delta P \pi a^4}{8\eta L}$.

12. En électricité on a $U = V_1 - V_2 = Ri$ où $U = V_1 - V_2$ est la différence de potentiel ~~tension~~ qui met en mouvement les charges et i est la charge qui traverse la section du conducteur par unité de temps.

En mécanique des fluides, c'est la différence de pression $\Delta P = P(z = 0) - P(z = L)$ qui met en mouvement le fluide et le débit volumique mesure le volume qui traverse la section du tuyau par unité de temps. La différence de pression joue le rôle de la tension et le débit joue le rôle du courant électrique d'où $R_H = \dfrac{\Delta P}{D_v} = \dfrac{8\eta L}{\pi a^4}$.

La résistance hydraulique augmente lorsque la viscosité du fluide augmente et diminue lorsque le rayon du tuyau augmente. En effet la résistance hydraulique mesure l'opposition du système au passage du fluide. Plus le fluide est visqueux et plus il s'accroche aux parois et plus il a de mal à avancer, la résistance est grande. Plus le tuyau est large et plus le fluide a de facilité à circuler, donc la résistance hydraulique diminue.

13. La résistance d'une fine artère de diamètre d et de longueur L est $R_a = \dfrac{8\eta L}{\pi(d/2)^4} = 2,38.10^{11}\ Pa.m^{-3}.s$.



Dans une association de résistances en parallèle, l'inverse de la résistance équivalente est égale à la somme des inverses des résistances de l'association soit $\boxed{\dfrac{1}{R_{rete}}} = \dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_a} ... \dfrac{1}{R_a} = \boxed{\dfrac{n}{R_a}}$ d'où $\boxed{R_{rete} = \dfrac{R_a}{n}}$.

On en déduit la différence de pression par l'analogue de la loi d'Ohm: $\underbrace{\Delta P}_{U} = R_{rete}\underbrace{D_v}_{i} = 4\ 900\ Pa = 37\ mmHg$.

14. On suppose ici que le rete n'est composé que d'une seule artère dont la section est égale à la somme des sections des n fines artères qui composent le rete soit $S = n\pi(d/2)^2 = 7,07.10^{-7}\ m^2$. On en déduit le rayon l'artère équivalente $S = \pi a^2$ soit $a = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = 470\ \mu m$. On en déduit la résistance de cette artère $R'_a = \dfrac{8\eta L}{\pi a^4} = 2,9.10^7\ Pa.m^{-3}.s$. On en déduit la différence de pression dans le rete $\Delta P = R'_a D_v = 61\ Pa = 0,5\ mmHg$.

Dans la première partie, on a vu que la pression dans la tête de la girafe passe de 100 $mmHg$ à 270 $mmHg$ lorsqu'elle passe de la position droite à la position pour boire. La surpression engendrée est diminuée de 37 $mmHg$ par la présence du rete du fait de sa composition en fines artères. Le rete a bien un rôle de protection du cerveau de la girafe en provoquant une diminution de pression de 37 $mmHg$.

15. Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport des effets convectifs (terme $\rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$) sur les effets diffusifs (terme $\eta\Delta\vec{v}$), son expression est donnée par $\boxed{\mathcal{R}e = \dfrac{\rho v L}{\eta}}$ où $L = D$ (diamètre de la carotide).

On estime la vitesse moyenne du sang dans la carotide en utilisant le débit volumique donné dans l'énoncé

$D_{v,carotide} = vS = v\pi(d/2)^2$ d'où $v = \dfrac{D_{v,carotide}}{\pi(D/2)^2} = \dfrac{40.10^{-6}}{\pi(4,1.10^{-3}/2)^2} = 3,0\ m.s^{-1}$. On a donc $\mathcal{R}e = \dfrac{1060.3.4,1.10^{-3}}{3,9.10^{-3}} \approx 3000$: l'écoulement dans la carotide n'est pas laminaire, les effets convectifs l'emportent. turbulent

On estime la vitesse moyenne du sang dans une fine artère du rete par $v = \dfrac{D_v}{90\pi(d/2)^2} = \dfrac{2,1.10^{-6}}{90\pi(50.10^{-6})^2} = 3,0\ m.s^{-1}$ (le débit volumique dans une fine artère du rete est égal au débit volumique total du rete divisé par le nombre de fines artères soit divisé par 90). On a donc $\mathcal{R}e = \dfrac{1060.3.100.10^{-6}}{3,9.10^{-3}} \approx 81$: l'écoulement dans une fine artère du rete est laminaire, les effets diffusifs l'emportent.

III. Correction : Tornade

Q11- Le vecteur tourbillon est défini par $\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}$. Il représente le vecteur rotation sur elles mêmes des particules fluides. Il est nul pour un écoulement irrotationnel où les particules fluides ne tournent pas sur elles mêmes et dans ce cas, il existe un potentiel des vitesses noté ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$.

Q12- Un écoulement parfait est tel que l'on néglige les effets diffusifs liés à la viscosité soit $\eta = 0$. (C'est le cas de tous les écoulements en dehors de la couche limite.)

le même volume

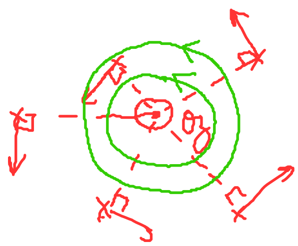
Dans un écoulement incompressible, la particule fluide garde la même masse volumique au cours de son mouvement. Le vecteur vitesse vérifie l'équation $\text{div}\,\vec{v} = 0$.

Dans un écoulement uniforme, la masse volumique est la même en tout point.

Dans un écoulement stationnaire, toutes les grandeurs physiques caractéristiques de l'écoulement (pression, température, vitesse...) sont indépendantes du temps et (les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires.)

Q13- Les lignes de courant sont les lignes orientées tangentes au vecteur vitesse en tout point. Dans le cas de la tornade, ce sont des cercles centrés sur Oz.

$\vec{v} = v\,\vec{e_\theta}$



régime stationnaire :

lignes de courant = trajectoires

Q14- On a $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$ avec $v_r = v_z = 0$ et $\boxed{v_\theta = v(r)}$. On remplace dans l'expression du rotationnel soit il reste $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,v = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(rv_\theta(r))\vec{e_z}$.

$\vec{v} = \boxed{v_\theta(r)}\,\vec{e_\theta} + 0 \times \vec{e_r} + 0 \times \vec{e_z}$

$\boxed{v_r = 0}$ $\boxed{v_z = 0}$

On a donc $\boxed{\frac{d}{dr}(rv_\theta(r)) = 2\Omega r.}$

$r<R$

Ainsi pour $r < R$: $\Omega = \Omega_0$ soit $\frac{d}{dr}(rv_\theta(r)) = 2\Omega_0 r$

d'où en intégrant par rapport à r: $rv_\theta(r) = \Omega_0 r^2 + A$

et en divisant par r: $v_\theta(r) = \Omega_0 r + \frac{A}{r}$.

Le terme $\frac{A}{r}$ diverge quand r tend vers zéro donc on doit prendre $\boxed{A = 0}$. Ainsi $\boxed{v_\theta(r) = \Omega_0 r \text{ pour } r < R.}$

$r>R$

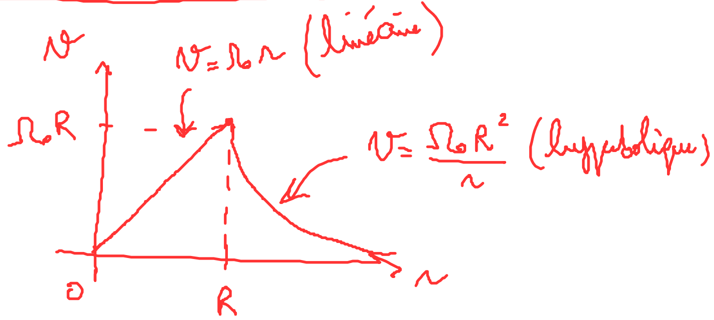
De même pour $r > R$: $\Omega = 0$ soit $\frac{d}{dr}(rv_\theta(r)) = 0$.

Ce qui signifie que $rv_\theta(r) = B$ soit $v_\theta(r) = \frac{B}{r}$.

$r<R$ $r>R$

On trouve B en écrivant que la vitesse est continue en R soit $v_\theta(r = R) = \Omega_0 R = \frac{B}{R}$ donc $B = \Omega_0 R^2$. On a donc $\boxed{v_\theta(r) = \frac{\Omega_0 R^2}{r}. \text{ pour } r > R}$

Q15-



Q16- On écrit l'équation d' Euler (c'est l'équation de Navier Stokes pour $\eta = 0$) en utilisant le formulaire donné et en négligeant le poids: $\mu(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{v^2}{2}) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\Lambda\vec{v}}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P$

Dans la zone $r > R$, l'écoulement est irrotationnel donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ et stationnaire donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

Il reste $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\mu v^2}{2} + P) = \vec{0}}$ soit $\boxed{P + \frac{\mu v^2}{2} \text{ est une constante,}}$ c'est la même constante dans tout le fluide.

$\mu = cte$

Q17- On trouve la valeur de la constante en utilisant les conditions aux limites données par l'énoncé: $P(r \to \infty) = P_a$ et $v(r \to \infty) = 0$.

On a donc $P(r) + \frac{\mu v^2(r)}{2} = P(r \to \infty) + \frac{\mu v^2(r \to \infty)}{2} = P_a$ avec $v(r) = \frac{\Omega_0 R^2}{r}$ soit $\boxed{P(r) = P_a - \frac{\mu \Omega_0^2 R^4}{2r^2}.}$ $r>R$

Q19- Dans la zone $r < R$, l'écoulement n'est pas irrotationnel donc $P + \frac{\mu v^2}{2}$ n'est pas constante, on doit reprendre l'équation d'Euler: $\mu(\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \overrightarrow{\text{grad}}(\frac{v^2}{2}) + \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}_{\neq 0}\Lambda\vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}P$.

avec $\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{v^2}{2}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\Omega_0^2 r^2}{2}) = \frac{d}{dr}(\frac{\Omega_0^2 r^2}{2})\vec{e_r} = \Omega_0^2 r\vec{e_r}$

avec $\underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}}_{2\Omega_0 \vec{e_z}}\Lambda\vec{v} = 2\Omega_0\vec{e_z}\Lambda\Omega_0 r\vec{e_\theta} = -2\Omega_0^2 r\vec{e_r}$.

$\mu[\overrightarrow{\text{grad}}(\frac{v^2}{2}) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}] = -\mu\Omega_0^2 r\,\vec{e_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P$

d'où $-\mu\Omega_0^2 r\vec{e_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$ soit $\frac{dP}{dr} = \mu\Omega_0^2 r$ et donc $\boxed{P(r) = \frac{\mu\Omega_0 r^2}{2} + B.}$

On trouve B en écrivant la continuité de la pression en $r = R$ soit $P(r = R) = \overbrace{P_a - \frac{\mu\Omega_0^2 R^2}{2}}^{r>R} = \overbrace{\frac{\mu\Omega_0 R^2}{2} + B}^{r<R}$

d'où $B = P_a - \mu\Omega_0 R^2$ et $\boxed{P(r) = P_a + \frac{\mu\Omega_0(r^2 - 2R^2)}{2} \text{ pour } r < R.}$

Q20- D'après les questions précédentes:

$P(r) - P_a = -\frac{\mu\Omega_0(2R^2 - r^2)}{2} < 0$ et $|P(r) - P_a| = \frac{\mu\Omega_0(2R^2 - r^2)}{2}$ pour $r < R$: donc $|P(r) - P_a|$ est maximale pour $r = 0$ et la valeur maximale est $\mu\Omega_0^2 R^2$. $r<R$

$P(r) - P_a = -\frac{\mu\Omega_0^2 R^4}{2r^2} < 0$ pour $r > R$ et $|P(r) - P_a| = \frac{\mu\Omega_0^2 R^4}{2r^2}$: cette fonction est maximale pour $r = R$ et la valeur maximale est $\frac{\mu\Omega_0^2 R^2}{2}$. $r>R$

Ainsi on conclut que la dépression est maximale pour $r = 0$, c'est donc au centre de la tornade que c'est le plus dangereux.

$|\Delta P_{max}| = \mu\,\Omega_0^2 R^2$