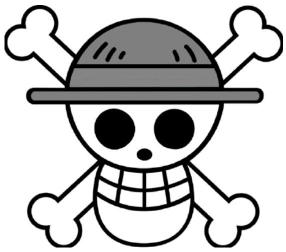


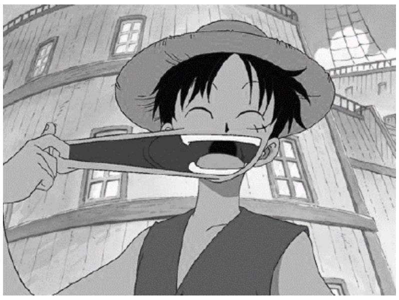
One Piece est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon.*

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.

Ce sujet aborde diverses questions de physique très librement inspirées de cette œuvre.

PARTIE I - *Gomu no jet pistol* : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique



Luffy peut étendre ses bras, notamment en emmagasinant l'énergie potentielle élastique et frapper son adversaire. On se propose ici de modéliser un exemple d'extension élastique.

I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction (Ox). En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_o\left[1 - e^{-a(x - x_o)}\right]^2$$

avec V_o, a et x_o des constantes réelles positives.

Q1. Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre $x_{éq}$.

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre : $x = x_{éq} + \varepsilon$, avec $|\varepsilon| \ll x_{éq}$.

Q2. En développant l'énergie potentielle $V(x)$ au second ordre en ε, montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_o et de a.

Aide: il faut montrer que V(x)=V0 a^2 epsilon^2 et pensez à utiliser $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, V$

Donnée: f (x0 + h) = f(x0) + h f ' (x0) + $\frac{h^2}{2}$ f '' (x0)

Q3. Si on appliquait cette force à une particule de masse *m* et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations ω_o de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps $t \to \varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0)=\beta$ et $\dot{\varepsilon}(0)=0$.

Ne pas faire **Q4.** Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur *k* et de longueur à vide ℓ_o. Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note *m* cette masse des masselottes entre les ressorts, $\vec{r}_n(t)=x_n(t)\vec{u}_x$ le vecteur position de la n$^{\text{ième}}$ masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à $t=0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre *a* (**figure 1**) est égale à la longueur à vide, $\ell_o = a$.
On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n=0$ à $t=0$.

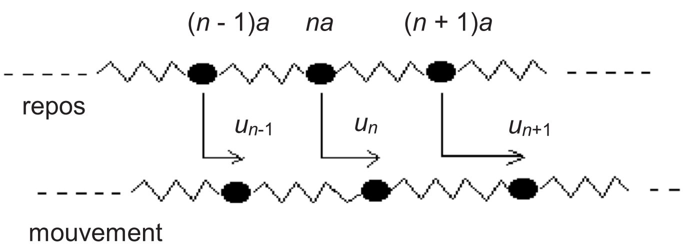


Figure 1 - Chaîne d'oscillateurs identiques

Q5. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la n$^{\text{ième}}$ masse $(x_n(0))$ en fonction de *n* et de *a*. En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x_n(t)$, *n* et de *a*.

Q6. Établir que l'équation du mouvement de la n$^{\text{ième}}$ masse, se met sous la forme : $\ddot{u}_n = \omega_o^2\left[u_{n+1}+u_{n-1}-\alpha u_n\right]$ avec α, constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel *q* strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$\underline{u_n(t)} = U_o \exp\left(i(\omega t - qna)\right) \text{ avec } i^2=-1,\ \omega \text{ et } U_o \text{ strictement positifs.}$$

Q7. Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_o et ω ?
Ecrire Un(t) en notation réelle.

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une p$^{\text{ieme}}$ masse (avec *p* > *n*) telle que : $\underline{u_p(t)}=\underline{u_n(t)}$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

Q8. Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de ~~a~~ q. Que représente finalement q ?

Q9. Montrer que la relation de dispersion, reliant ω et q, est $\omega^2 = 4\omega_o^2\left(\sin\dfrac{q\,a}{2}\right)^2$. Donnée: cos(2a)=1-2 sin^2 (a)
Aide: utiliser les solutions complexes Un et l'équation de la question Q6

Représenter graphiquement la fonction : $\left[q \mapsto \omega(q)\right]$ en se restreignant à l'intervalle $\left[0, \dfrac{2\pi}{a}\right]$.

Q10. Rappeler la définition de la vitesse de phase notée vphi de l'onde. Comment lit-on cette vitesse sur le graphe en un point de coordonnées (q,omega)?

Q11. La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire ω pour que q existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.

Q12. Déterminer ~~v_g et~~ v_ϕ pour $q \ll \dfrac{\pi}{a}$ ~~et pour $q = \dfrac{\pi}{a}$~~. On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.

Le fluide (ou haki en VO) est un pouvoir mystérieux du manga, qui permet à son possesseur d'utiliser sa propre énergie spirituelle à des fins diverses, notamment pour renforcer sa peau et la rendre aussi dure qu'un diamant.

I.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes.

Hypothèses du modèle :

- tous les défauts du cristal réel sont négligés ;
- l'agitation thermique n'est qu'une vibration autour d'une position moyenne des atomes qui sera prise comme position d'équilibre ;
- les vibrations d'origine thermique sont décomposables en ondes planes ;
- seules les interactions entre plus proches voisins dans une maille cristalline cubique simple sont considérées : les trois dimensions de l'espace sont découplées et l'étude sera faite sur l'une d'elles selon le modèle d'un cristal à une dimension ;
- l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse m, distants de x, sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6},\quad (A,B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

attaractive ou répulsive   Aide: penser à utiliser $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$

Q13. À quelles interactions correspondent les deux termes du potentiel de Lennard-Jones ?

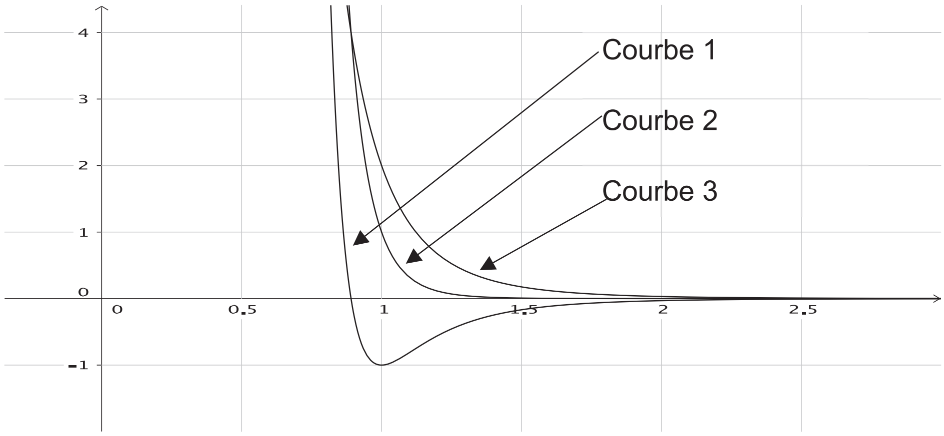
Q14. En notant a, la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que V se met sous la forme :
$V(x) = \Theta_o\left[\left(\dfrac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\dfrac{a}{x}\right)^6\right]$, où la profondeur du puits de potentiel Θ_o est à exprimer en fonction de B et de a.

Donnée: f (x0 + h) = f(x0) + h f ' (x0) + $\frac{h^2}{2}$ f '' (x0)

Q15. Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes :

$$\left[\frac{x}{a} \mapsto \frac{V(x)}{\Theta_o}\right], \left[\frac{x}{a} \mapsto \left(\frac{a}{x}\right)^{12}\right] \text{ et } \left[\frac{x}{a} \mapsto 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right].$$

Identifier ces courbes.



Q16. Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant *a*, la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur *k* que l'on exprimera en fonction de Θ_o et de *a*. On pourra développer le potentiel au seconde ordre grâce à la formule de Taylor.

Q17. Calculer *k* et ω_o pour $a = 2{,}0 \cdot 10^{-10}$ m, $\Theta_o = 0{,}10$ eV et $m = 1{,}0 \cdot 10^{-25}$ kg.

Cette modélisation du solide cristallin permet de décrire la propagation d'ondes mécaniques longitudinales dans les solides et on s'intéresse ici aux aspects énergétiques. On suppose que le mouvement des masses correspond au passage d'une onde plane harmonique de pulsation ω dont la formule est indiquée entre les questions **Q6** et **Q7**.

Q18. Exprimer la valeur moyenne temporelle de l'énergie cinétique $\langle E_c \rangle$ d'un atome indicé par *n* en fonction de *m*, U_o et ω. En déduire l'énergie cinétique moyenne pour N atomes.

Aide: utilisez Un(t) donnée question Q6

I. 4 - Du discret au continu

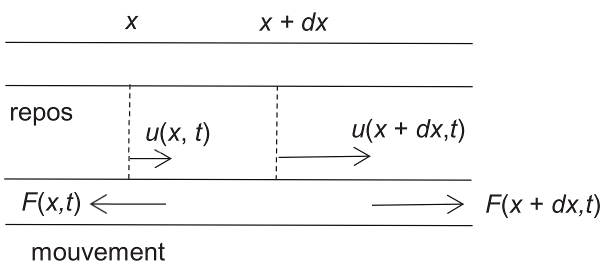


Figure 2 - Passage au continu

Q22. À partir de la relation de dispersion, exprimer la longueur d'onde λ de l'onde qui se propage en fonction de ω, ω_0 et de a.

Calculer λ pour des fréquences ultrasonores $(f = 500 \text{ kHz})$. Commenter.

Q23. La comparaison de la longueur d'onde au paramètre a permet d'écrire $u_n(t) = u(x,t)$ (**figure 2**) et d'obtenir une équation de D'Alembert de la forme $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{k}{m} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$. Faites la démonstration

Calculer la célérité de l'onde dans le cristal pour des fréquences ultrasonores.

Grâce à ce corps élastique, malléable, Luffy peut étirer son bras loin derrière lui et le ramener brutalement en avant, frappant son adversaire ; l'énergie élastique emmagasinée est alors relâchée à l'impact…