

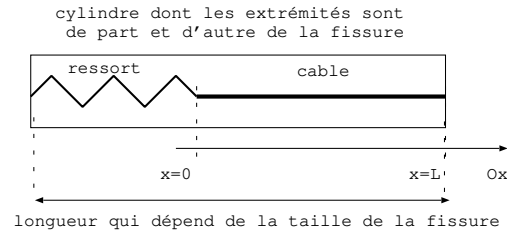
TD 1 ondes

I. Fissuromètre

Pour déceler une légère modification de la largeur d'une fissure, une technique consiste à utiliser un capteur fixé de part et d'autre de la fissure. Ce capteur est composé d'un ressort, d'un câble en série et d'un détecteur. Le tout est situé à l'intérieur d'un cylindre protecteur.



On assimile le câble à une corde inextensible sans raideur, de masse linéique μ , tendu par un ressort de raideur $k = 102 \text{ N.m}^{-1}$ fixé à son extrémité qui exerce une tension T_0 . La corde est placée entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On étudie les vibrations transversales de la corde dans la direction Oy . La corde est fixée en $y = 0$ à chacune de ses extrémités. Le ressort subit une elongation de $1,5 \text{ cm}$ supposée fixe au cours des vibrations de la corde.



1. Le câble en acier de masse volumique $\rho = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$ a une longueur de $0,50 \text{ m}$ et un rayon de $2,00 \text{ mm}$. Calculer sa masse linéique.
2. Calculer la tension T_0 .
3. Donner sans démonstration l'équation de propagation que vérifie l'elongation $y(x, t)$, en précisant l'expression de la célérité c des ondes. Calculer c .

Réponses: $T_0 = 1,53 \text{ N}$, $\mu = 0,10 \text{ kg.m}^{-2}$, $c = 3,9 \text{ m.s}^{-1}$

II. Ondes le long d'un ressort

On considère un ressort à spires non jointives de masse m_0 , de longueur à vide l_0 et de raideur k . On définit la masse linéique du ressort $\mu = \frac{m_0}{l_0}$.

1. Ce ressort s'allonge de $5,0 \text{ cm}$ lorsqu'on lui suspend une masse de 20 g . Calculer sa constante de raideur k .

On définit $\xi(x, t)$, le déplacement à l'instant t d'un point du ressort d'abscisse x au repos, ce point a donc pour abscisse $x + \xi(x, t)$ à l'instant t .

Au point x la force qu'exerce le côté droit du ressort sur le côté gauche est : $\vec{F}_d(x, t) = kl_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x$

2. Représenter la tranche de ressort comprise entre x et $x + dx$ au repos. Représenter cette même tranche à l'instant t quelconque en faisant figurer les grandeurs $\xi(x, t)$ et $\xi(x + dx, t)$. Montrer que l'allongement relatif du ressort s'écrit $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$. C'est ce terme que nous trouvons dans l'expression de la force.

3. Montrer, en appliquant la RFD à la tranche de ressort comprise au repos entre x et $x + dx$, que $\xi(x, t)$ vérifie l'équation: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$. Exprimer c en fonction de k_0 , l_0 et μ . Vérifier l'unité de c . AN: calculer c pour un ressort de masse $m_0 = 180 \text{ g}$, de longueur à vide $l_0 = 1,0 \text{ m}$.

Réponses: 1- $k = 0,4 \text{ N.m}^{-1}$ 3- $c = \sqrt{\frac{kl_0}{m}} = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$

III. Alimentation caténaire d'un TGV

L'énergie électrique nécessaire au fonctionnement d'un TGV est apportée par une ligne suspendue, la caténaire, sur laquelle frotte une pièce métallique, le pantographe, qui soulève la caténaire. Cela provoque une onde qui soulève à son tour la caténaire et qui se propage avec une célérité c . Pour un bon fonctionnement il ne faut pas que le train rattrape cette onde. Soit V la vitesse du train, il faut donc avoir $V < c$.



On modélise le système d'alimentation d'un TGV par un câble de masse linéique μ , tendu sous la tension T_0 et suspendu par de petits câbles verticaux régulièrement espacés à un gros câble horizontal indéformable. On étudie les mouvements verticaux $z(x, t)$ de la caténaire, son mode de suspension exerce sur une longueur élémentaire dx une force verticale de la forme $-Kz(x, t)dx\vec{e}_z$. On néglige le poids et la raideur du câble. On fait l'hypothèse que les mouvements du câble sont de faible amplitude donc les angles que fait le câble par rapport à l'horizontale sont petits.

En considérant la portion élémentaire de caténaire comprise entre x et $x + dx$. Montrer que la tension le long de la caténaire est uniforme et que l'équation de propagation vérifiée par $z(x, t)$ s'écrit:

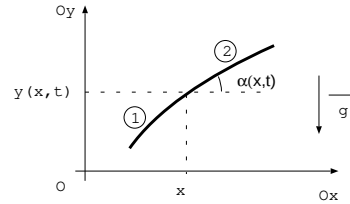
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

Exprimer δ et c en fonction des données et déduire de leurs expressions leurs unités.

Réponses: $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et $\delta = \sqrt{\frac{T_0}{K}}$ est une distance

IV. Effet de la raideur d'une corde

On considère une corde horizontale de longueur L , de masse linéique μ uniforme, et de tension T_0 . On note $y(x, t)$ la vibration transversale et $\alpha(x, t)$ l'angle que fait la tangente à la corde par rapport à l'horizontale au point M d'abscisse x à l'instant t . On néglige le poids de la corde et les mouvements horizontaux de celle-ci. On fait des développements limités à l'ordre 1 en α .



La corde n'étant pas parfaitement souple, la portion de corde 1 exerce sur la portion de corde 2 en x à l'instant t la force: $\vec{F}_{1/2}(x, t) = \gamma \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t)\vec{e}_y$.

1. Exprimer l'unité de γ en fonction des unités SI: kg, m et s .
2. La raideur de la corde est caractérisée par son module d'Young E donné en Pascal et d'autant plus grand que la corde est rigide. Exprimer l'unité de E en fonction des unités SI: kg, m et s .
3. Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs numériques à donner à β et δ pour que l'on puisse écrire γ sous la forme: $\gamma = E^\delta a^\beta$ où a est le rayon de la corde.
4. On considère le système élémentaire compris entre les abscisses x et $x + dx$.

4.a. Représenter dans le plan Oxy , le bout de corde compris entre x et $x + dx$. Porter sur le schéma les forces qui s'exercent sur ce système et ajouter les grandeurs physiques $\alpha(x, t)$, $\alpha(x + dx, t)$, $y(x, t)$ et $y(x + dx, t)$.

4.b. Montrer que $y(x, t)$ vérifie l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{T_0} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

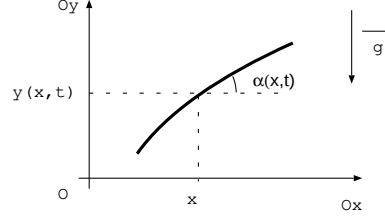
Donner l'expression et la signification de c .

5. La corde est fixée en ses extrémités de telle sorte que : $y(x=0, t) = y(x=L, t) = 0$ pour tout t . On cherche les modes propres de la forme $y_n(x, t) = A_n \sin(\frac{n\pi x}{L})g(t)$. Déduire de l'équation de propagation, l'équation différentielle vérifiée par $g(t)$ et en déduire les pulsations propres ω_n .

Réponses: 3- $\delta = 1$ et $\beta = 4$ 5- $\omega_n = \sqrt{1 + \frac{n^2 \pi^2 \gamma}{T_0 L^2}}$

V. Ondes sur une corde

Soit une corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 . Au repos la corde est rectiligne et confondue avec l'axe horizontal Ox . On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.



On fait les hypothèses suivantes :

- Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox
- On ne garde que les termes du premier ordre en $y(x, t)$ et en ses dérivées

1. On considère l'élément de corde situé entre x et $x + dx$. Appliquer la RFD à cet élément en tenant compte du poids de la corde. En déduire que la force de tension est de norme constante et montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$ s'écrit: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{g}{c^2} = 0$.

2. Dans cette question, on fait l'hypothèse selon laquelle le poids est négligeable et on tient compte des frottements exercés sur la corde, soit l'élément de corde compris entre x et $x + dx$ subit la force d'amortissement $d\vec{f} = -b \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) dx \vec{e}_y$ avec $b > 0$. Appliquer la RFD à cet élément en tenant compte du poids de la corde et montrer que la norme de la tension est constante et que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$ s'écrit: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{b}{T_0} \frac{\partial y}{\partial t} = 0$.

On propose une solution de la forme $\underline{y}(x, t) = y_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. De quel type d'onde s'agit-il? Etablir l'expression de $\underline{k}^2$.

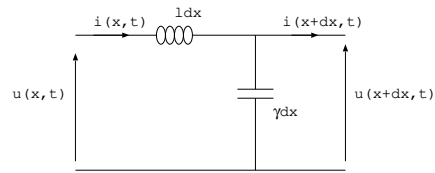
3. Dans cette question, on fait l'hypothèse selon laquelle le poids est négligeable et on tient compte de la raideur de la corde qui se manifeste par une force supplémentaire donnée par: $\vec{F}_g(x, t) = \gamma \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \vec{e}_y$: c'est la force exercée en $x(t)$ par le bout de corde à gauche de x sur le bout de corde à droite de x . Comment s'écrit la force exercée par le bout de corde à droite sur le bout de corde à gauche de $x + dx$? Montrer que la tension de la corde est uniforme et que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$ s'écrit: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{T_0} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$.

On propose une solution de la forme $\underline{y}(x, t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)}$. De quel type d'onde s'agit-il? Exprimer ω en fonction de k , c , T_0 et γ .

Réponses: 2- $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j\omega b}{T_0}$ 3- $\omega = kc \sqrt{1 + \frac{k^2 \gamma}{T_0}}$

VI. Propagation dans un câble coaxial

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité $\gamma \cdot dx$.



1. Dédurre de l'application d'une loi des noeuds et d'une loi des mailles que $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient les équations différentielles $\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -l \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$.
2. Montrer que $u(x, t)$ et $i(x, t)$ sont solutions d'une équation de d'Alembert (indication : pour toute fonction $y(x, t)$ on a $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t})$). Quelle est la vitesse de propagation des ondes ? Vérifier l'homogénéité du résultat.
3. Une onde de la forme $u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$ se propage dans le câble. En remplaçant $u(x, t)$ dans l'équation d'onde trouvée précédemment déterminer la relation entre k et ω . Donner l'expression de $i(x, t)$ en utilisant une des équations obtenues dans la question 1.

Réponses : 2- $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$ 3- relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$ et $i(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{l}} u_0 \cos(\omega t - kx)$