

# CCINP Physique PC 2020

## De la physique de l'aéronef

### *Proposition de corrigé*

Ce corrigé a été rédigé par Christian GIRAUD et David LASNE. N'hésitez pas à nous signaler par mail (christian.giraud@ac-bordeaux.fr ou david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves. Merci à Matthieu RIGAUT pour les discussions.

Par ailleurs quelques imperfections ou ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure.

## Partie I - Mécanique du vol

### I.1 - Généralités

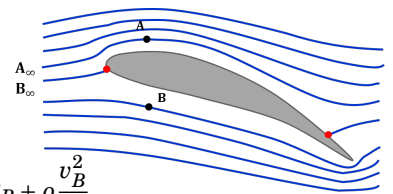
**Q1.** Une ligne de courant est la courbe telle qu'en chacun de ses points la particule de fluide coïncidente à une **vitesse tangente à la ligne**. C'est un **point de vue eulérien** comme une photo instantanée (différent de la trajectoire d'une particule).

**Q2.** Considérons deux lignes de courants infiniment grandes ( $A_\infty, A$ ) et ( $B_\infty, B$ ).

Les lignes de courant étant plus resserrées en  $A$  qu'en  $B$ , cela signifie que la vitesse  $y$  est plus grande (conséquence de  $\text{div } \vec{v} = 0$  pour un écoulement incompressible).

Par ailleurs, l'écoulement étant supposé stationnaire de l'air supposé parfait, homogène et incompressible, en utilisant le **théorème de BERNOULLI** généralisé à un écoulement rotationnel, en négligeant les différences d'altitude, sur chacune des lignes de courant :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \text{ et } P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \text{ donc } P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2}$$



Sachant que  $v_A > v_B$ , on peut alors conclure que  $P_A < P_B$  et cette dépression va générer une force de portance.

**Q3.** D'après l'expression précédente  $P_{extrados} < P_{intrados}$  donc en utilisant l'expression des coefficients de pression :

$$C_{P1} = C_{P_{intrados}} > C_{P2} = C_{P_{extrados}}$$

**Q4.** En reprenant le théorème de BERNOULLI :

$$P + \rho \frac{v^2}{2} = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \Rightarrow P - P_\infty = \rho \frac{v_\infty^2}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2} \right) \Rightarrow C_P = \frac{P - P_\infty}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}} = 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2} \leq 1$$

**Q5.** On rappelle qu'une force est une masse multipliée par une accélération (PFD). Par conséquent :

$$[C_x] = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2.M.L^{-3}.(L.T^{-1})^2} = \frac{M.L.T^{-2}}{M.L.T^{-2}} = 1$$

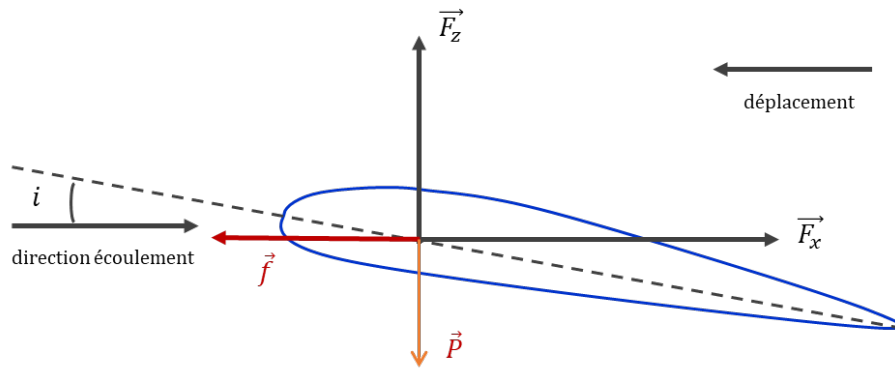
Le coefficient de portance est bien adimensionné.

**Q6.** Pour un angle d'incidence de  $6^\circ$ , les écarts entre les coefficients de pression de l'intrados et de l'extrados sont plus grands (courbes en pointillés) que pour  $2^\circ$ . D'après les expressions des coefficients de pression, on peut en déduire que les écarts entre les pressions sont supérieurs et donc que la portance est supérieure. En conclusion, le coefficient de portance est supérieur pour une incidence de  $6^\circ$ .

**Q7.** Question peu claire : comment sont faits ces volets? Pour un non spécialiste de l'aéronautique, il est très difficile de comprendre la question. Si on considère que ces volets permettent d'augmenter la surface de l'aile, en gardant la même inclinaison (ce que semble suggérer la question, même si dans mes souvenirs les volets sont plutôt des parties inclinables sur les avions usuels), alors il faut les ouvrir pour augmenter la portance et décoller plus facilement.

Notons aussi qu'il existe des volets qui "sortent" en basculant, ce qui revient à augmenter l'angle d'incidence, et donc à améliorer aussi la portance d'après la question précédente.

## Q8.



La force de trainée est compensée par une force motrice (réacteurs).

**Q9.** A haute altitude la masse volumique de l'air est plus faible donc la trainée aussi (consommation moindre de carburant) **mais la portance diminue aussi : est-ce problématique? que fallait-il répondre?...**

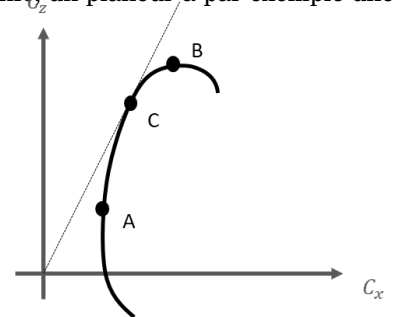
**Q10.** Le mouvement de l'avion dans le référentiel terrestre supposé galiléen étant rectiligne uniforme alors la somme des forces appliquées (poids, trainée et portance) est nulle. En projection sur l'horizontale, il reste :  $-F_x \cos \alpha + F_z \sin \alpha = 0$  d'où

$$f = \frac{C_z}{C_x} = \frac{F_z}{F_x} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Par ailleurs, si l'avion descend de  $d_V$  sur une distance  $d_H$ , alors il suit une pente telle que  $\tan \alpha = \frac{d_V}{d_H}$  donc  $d_H = f d_V$ . Plus l'aile possède une finesse importante, plus l'avion "planera" sur une longue distance. Pour info, un planeur a par exemple une finesse de 60 : il peut parcourir 60 km en descendant seulement de 1 km.

**Q11.** Le point A correspond à la trainée minimale, le point B à la portance maximale et le point C à la finesse maximale (pente  $f = \frac{C_z}{C_x}$  maximale)

**Q12.** Question étrange : si on suit les questions précédentes, on trouve une conséquence sur  $\alpha$  (avec en plus une évolution non triviale), mais ce n'est pas à proprement parler l'angle d'incidence  $i$ . Si on reprend simplement le graphe, on observe que  $C_z$  augmente, et d'après la question Q6 l'angle d'incidence augmente également.



## I.2 - Trajectoire d'un avion en présence d'un vent latéral

**Q13.** Considérons le référentiel  $\mathcal{R}_V$  attaché au mouvement du vent et le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . La vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre est, d'après la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{a/\mathcal{R}} = \vec{v}_{a/\mathcal{R}_V} + \vec{v}_{\mathcal{R}_V/\mathcal{R}}$$

L'avion se déplace en ligne droite selon  $\vec{u}_y$  (dans  $\mathcal{R}$ ) ssi sa vitesse n'a pas de composante selon  $\vec{u}_x$  d'où, en projetant la relation vectorielle précédente sur  $\vec{u}_x$  :

$$V_a \sin \theta - v_v \sin \phi = 0$$

**Q14.** Application numérique :  $\theta = \arcsin\left(\frac{v_v}{V_a} \sin \phi\right) = 2,5^\circ$

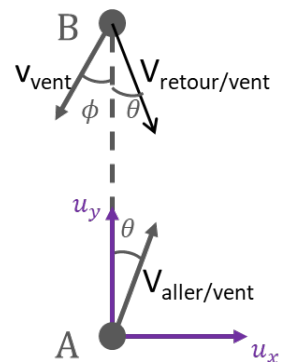
**Q15.** Dans la situation précédente, la vitesse dans  $\mathcal{R}$  est :

- $\vec{v}_{a/\mathcal{R}} = (V_a \cos \theta - v_v \cos \phi) \vec{u}_y$  constante à l'aller, donc la durée du trajet aller est  $T_a = \frac{d}{V_a \cos \theta - v_v \cos \phi}$
- $\vec{v}_{a/\mathcal{R}} = (-V_a \cos \theta - v_v \cos \phi) \vec{u}_y$  constante au retour (schéma), donc la durée du trajet retour est  $T_r = \frac{d}{V_a \cos \theta + v_v \cos \phi}$

Alors la durée totale est  $T = T_a + T_r \approx 8,2 \cdot 10^3$  s.

Dans une situation sans vent, l'avion va directement à son objectif à la vitesse  $V_a$  donc  $T' = \frac{2d}{V_a} \approx 8,1 \cdot 10^3$  s.

L'écart est relativement faible (quelques minutes pour un trajet de plus de 2 heures) car l'action "freinante" du vent sur l'aller est en partie compensée par son action motrice au retour. De plus, la vitesse du vent est faible par rapport à celle de l'avion.



**Q16.** Question délicate, très ouverte, mais ne donnant pas toutes les données utiles : attendait-on une réponse précise ou toute piste de solution est-elle validée? Voir par exemple le corrigé de M. RIGAUT pour une autre approche.

Dans un premier temps, en négligeant les frottements de la piste et la trainée de l'avion et en supposant la force de poussée  $F$  constante, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique sur la trajectoire horizontale de décollage :  $\frac{1}{2}mv^2 = F \cdot d$  où  $d \approx 2$  km une estimation de la longueur d'une piste.

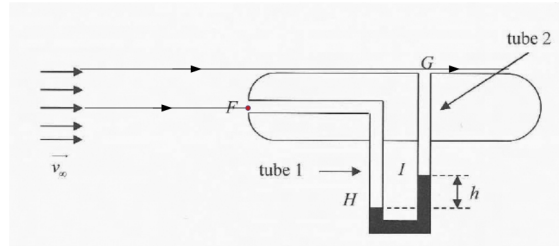
On peut alors en déduire :  $F \approx 7.10^5$  N d'où  $2.10^5$  N par réacteur : on a le bon ordre de grandeur, mais la proposition est probablement plus adaptée à la prise en compte de la trainée et des frottements.

Cependant, pour une finesse de 10, on peut imaginer que la trainée est faible devant la portance, ce qui permet de justifier (en partie) d'avoir négligé la trainée.

## Partie II - Instrumentation

### II.1 - Tube de PITOT

**Q17.** La ligne de courant qui aboutit en  $F$  se termine en ce point qui est un point d'arrêt par symétrie (le fluide est au repos dans le tube). Celle qui passe en  $G$  est en fait très peu perturbée depuis l'infini car le tube est très fin.



**Q18.** Les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de BERNOULLI le long d'une ligne de courant, en négligeant les effets de pesanteur. On suit alors les 2 lignes de courant précédentes.

Entre l'infini et  $F$ , on peut écrire :  $P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} = P_F + \rho \frac{v_F^2}{2}$  or  $v_F = 0$  donc  $P_F = P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2}$ .

Entre l'infini et  $G$ , on obtient :  $P_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} = P_G + \rho \frac{v_G^2}{2}$ . Or la ligne de courant passant par  $G$  est peu perturbée par le tube donc  $v_G \approx v_\infty$  et donc  $P_G \approx P_\infty$ .

**Q19.** Le liquide dans le tube est à l'équilibre. On peut donc utiliser la statique des fluides :  $P_{inf} = P_{sup} + \rho_l g \Delta z$ , ce qui donne ici :  $P_H - P_I = \rho_l g h$ .

**Q20.** Si on néglige les effets de pesanteur sur l'air, on peut écrire :  $P_H \approx P_F$  et  $P_I \approx P_G = P_\infty$ . On injecte dans la relation précédente :

$$P_\infty + \rho_\infty \frac{v_\infty^2}{2} - P_\infty = \rho_l g h \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho_\infty}}$$

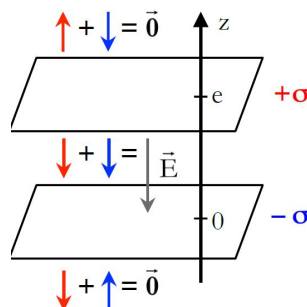
Lorsque la vitesse de l'air augmente,  $h$  augmente.

### II.1 - Mesure du givre

**Q21.** Démonstration classique du cours, dont voici les grandes lignes. On calcule dans un premier temps le champ créé par une plaque seule. On utilise les symétries et invariances pour montrer que le champ est de la forme  $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$  (pour des armatures infinies). On applique le théorème de GAUSS sur un cylindre droit dont les faces du haut et du bas sont en  $z$  et  $-z$  pour exploiter à nouveau une symétrie. On obtient  $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  de part et d'autre.

Reste à combiner l'effet des 2 plaques : le champ créé par la plaque chargée  $+\sigma$  vaut  $+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  au-dessus de la plaque, et  $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$ . On a l'effet opposé pour l'autre plaque. Par superposition, on obtient que le champ est nul à l'extérieur du condensateur et vaut

$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  entre les armatures :



**Q22.** On calcule d'abord  $U = V(z = e) - V(z = 0) = \int dV = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^e dz \Leftrightarrow U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$

Or par définition,  $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$ , donc ici,  $C = \frac{Q}{\frac{Qe}{S\epsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{S\epsilon_0}{e}}$

**Q23.** Si on remplace le vide par la glace entre les armatures, on remplace  $\epsilon_0$  par  $80\epsilon_0$  : la capacité augmente, et ce d'autant plus que l'espace entre les armatures est rempli de glace. En mesurant  $C$ , on peut donc estimer l'épaisseur de glace. **Mais pourquoi utiliser 3 condensateurs? Le 3e suffit, avec une réponse linéaire pour les faibles épaisseurs de glace. De plus, la situation est difficile à analyser en détail tant elle est éloignée du cas du condensateur plan!**

**Q24.** Un transducteur est placé à la surface extérieure de la sonde. Il émet des impulsions ultrasonores dans l'air. Si une couche de givre s'est déposée sur la surface, les ondes sonores vont traverser le givre avant de passer dans l'air. Au passage de l'interface entre les deux, comme les impédances acoustiques des milieux sont a priori très différentes, il y aura une réflexion non négligeable de l'onde sonore dont une partie au moins reviendra vers un détecteur qui peut être l'émetteur lui-même (transducteur réversible). En mesurant le temps mis par l'onde pour faire un aller-retour  $\Delta t$ , et en connaissant la vitesse  $c$  du son dans la glace, on peut en déduire l'épaisseur de givre ( $e = \frac{c\Delta t}{2}$ ).

## Partie III - Propulsion

### II.1 - Force de propulsion

**Q25.** Le système  $\Sigma^*$  est constitué à l'instant  $t$  de l'air contenu dans le turboréacteur et de la masse entrante. Par extensivité de la quantité de mouvement, on a  $\boxed{\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_e \vec{v}_e}$ .

**Q26.** De même,  $\boxed{\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s}$ .

**Q27.** En régime stationnaire,  $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$ . De plus,  $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$  car il s'agit d'une grandeur eulérienne (associée à un système immobile), donc constante en régime stationnaire par définition. On a donc après simplification :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}^*(t)}{dt} = \frac{\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)}$$

**Q28.** Le fluide dans le turboréacteur est soumis à :

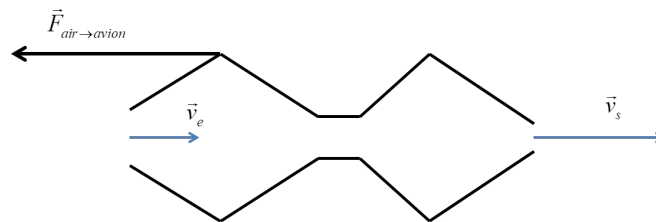
- la pesanteur (négligée)
- les forces de pression
- l'action du moteur sur l'air, noté  $\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}}$

**Q29.** La pesanteur est explicitement négligée dans l'énoncé.

De plus, les forces de pression s'appliquent à l'entrée et à la sortie du turboréacteur (pas sur les côtés où c'est le métal qui est au contact du fluide en écoulement, donc l'avion : cette action est comptée dans la 3e force du bilan). Ces forces de pressions peuvent s'écrire  $\vec{F}_p = (S_{\text{entree}} - S_{\text{sortie}})P_0 \vec{u}_x$ . Il semble qu'elles soient dans la suite négligées : soit parce que les deux surfaces sont sensiblement les mêmes, soit parce que la pression atmosphérique est relativement faible et n'a que peu d'influence ici.

Si on applique le théorème de la quantité de mouvement (PFD) au système fermé  $\Sigma^*$ , on obtient bien  $\boxed{\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)}$ .

**Q30.** D'après le principe des actions réciproques,  $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{avion}} = -\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m(\vec{v}_e - \vec{v}_s)$ .



$\vec{v}_s$  et  $\vec{v}_e$  sont orientées vers l'arrière, et on veut une force propulsive vers l'avant, donc il faut donc que  $\boxed{v_s > v_e}$ .

### II.2 - Cycle thermodynamique de BRAYTON

**Q31.** Dans le diffuseur, il n'y a ni pièce mobile ni transfert thermique, donc en négligeant la pesanteur, il vient :  $\Delta h + \Delta(\frac{v^2}{2}) = 0$ . La vitesse en sortie et négligeable et celle en entrée vaut  $V_A$ , et on a un gaz supposé parfait, donc  $\Delta h = c_p \Delta T$ . On en déduit :

$$\boxed{T_2 = T_1 + \frac{V_A^2}{2c_p}}$$

Application numérique :  $T_2 = 264 \text{ K}$

**Q32.** La transformation est adiabatique et réversible (réversibilité un peu surprenante pour un système de ce type) donc isentropique : on peut utiliser la loi de LAPLACE<sup>1</sup> :

$$P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \Rightarrow \boxed{P_2 = P_1 \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$$

Application numérique :  $P_2 = 55,9 \text{ kPa}$

**Q33.** Le compresseur est adiabatique et on néglige pesanteur et énergie cinétique. Le premier principe s'écrit donc :

$$\Delta h = c_p(T_3 - T_2) = w_{comp}$$

On a donc  $w_{comp} = c_p(T_3 - T_2)$ . Pour avoir la puissance, on multiplie par le débit massique :

Application numérique :  $\mathcal{P}_{comp} = D_m c_p(T_3 - T_2) = 10,7 \text{ MW}$ .

**Q34.** D'après l'énoncé, tout le travail fourni par la turbine est reçu par le compresseur, donc  $w_{turb} = -w_{comp}$ . Le premier principe dans la turbine (adiabatique) donne :  $c_p(T_5 - T_4) = w_{turb}$ . On en déduit alors :

$$c_p(T_5 - T_4) = -c_p(T_3 - T_2) \Rightarrow \boxed{T_5 = T_4 + T_2 - T_3}$$

Application numérique :  $T_5 = 1,18.10^3 \text{ K}$

Par ailleurs, l'échauffement étant isobare,  $P_4 = P_3 = 10P_2 = 5,59.10^5 \text{ Pa}$ .

On utilise à nouveau la loi de LAPLACE dans la turbine (isentropique) :  $\boxed{P_5 = P_4 \left( \frac{T_4}{T_5} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$ .

Application numérique :  $P_5 = 2,93.10^5 \text{ Pa}$

**Q35.** La tuyère est adiabatique et ne présente pas de pièces mobiles ( $w_u = q = 0$ ) mais l'énergie cinétique en sortie n'est pas négligeable. Le premier principe s'écrit donc (toujours avec la seconde loi de JOULE reliant  $h$  et  $T$  pour un gaz parfait) :

$$c_p(T_6 - T_5) + \frac{1}{2}v_s^2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_s = \sqrt{2c_p(T_5 - T_6)}}$$

Application numérique :  $v_s = 1,05.10^3 \text{ m.s}^{-1}$

On obtient une vitesse supersonique, un peu surprenant par rapport à la suite de l'énoncé...

**Q36.** On admet que la puissance recherchée est celle reçue par l'avion de la part de l'air dans le référentiel terrestre, soit

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{air \rightarrow avion} \cdot \vec{v}_{avion/sol} = D_m(\mathbf{v}_s - \mathbf{V}_a) \cdot \mathbf{V}_a.$$

Application numérique :  $\mathcal{P} = 9,24 \text{ MW}$ .

**Q37.** Le rendement est  $\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{chamb}}$ .

Application numérique :  $\eta = 20,3\%$

Ce rendement est inférieur aux machines thermiques motrices usuelles (moteur de voiture : rendement de 30 à 40%).

## II.2 - Étude théorique de la tuyère

**Q38.**  $c_p T_e$  est homogène à une enthalpie massique, donc une énergie massique. Or l'énergie cinétique massique s'écrit  $\frac{v^2}{2}$  donc est homogène à une vitesse au carré.  $v_m$  est donc bien homogène à une vitesse.

**Q39.** Par définition, le débit massique est  $D_m = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ . Ici, compte tenu de la géométrie unidimensionnelle, il se simplifie en  $D_m = \rho(x)v(x)S(x)$ .

Pour obtenir l'expression demandée, on exprime  $v(x)$  et  $\rho(x)$ .  $v(x)$  est donnée par l'énoncé :

$$v(x) = \sqrt{v_e^2 + v_m^2 \left[ 1 - \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = v_m \sqrt{\left( \frac{v_e}{v_m} \right)^2 + 1 - \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Pour exprimer  $\rho(x)$ , on utilise la loi de LAPLACE :

$$PV^\gamma = cste \Rightarrow P\rho^{-\gamma} = cste \Rightarrow \rho(x) = \rho_e \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Finalement, en remplaçant, on obtient :

$$D_m = \rho_e \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{1}{\gamma}} v_m \sqrt{\left( \frac{v_e}{v_m} \right)^2 + 1 - \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} S(x)$$

1. valable également en présence d'une énergie cinétique car découlant de l'identité thermodynamique ; on pourra aussi consulter le Chapitre 13 du "PÉREZ" de Thermodynamique

On a bien  $D_m = \rho_e v_m S(x) G(x)$  avec

$$G(x) = \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\left( \frac{v_e}{v_m} \right)^2 + 1 - \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

**Q40.** L'énoncé pose  $\alpha = \frac{P(x)}{P_e}$  donc  $G(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\left( \frac{v_e}{v_m} \right)^2 + 1 - \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$ .

A l'entrée de la tuyère,  $P(0) = P_e$  donc  $\alpha = 1$ , soit  $G = 0$  d'après la courbe.

**Le sujet est alors un peu déroutant : si  $G = 0$  le débit est nul. En réalité,  $G = \frac{v_e}{v_m}$  à l'entrée, rapport très faible.**

Pour que la vitesse augmente, il faut que la pression diminue d'après l'expression de  $v(x)$ . Il faut donc diminuer  $\alpha$ , ce qui fait croître  $G$  dans un premier temps. Le débit massique étant constant (régime stationnaire), la section  $S$  doit diminuer : il faut bien une tuyère convergente.

**Q41.** Une tuyère constamment convergente impose, par conservation du débit, que  $G$  puisse augmenter indéfiniment, or  $G$  présente un maximum : la section a donc une valeur minimale acceptable, prise au maximum de  $G$ , et la vitesse une valeur maximale :

$$v_{lim} = \sqrt{v_e^2 + v_m^2 (1 - \alpha_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}})} = v_m \sqrt{1 - \frac{2}{1+\gamma}} \Rightarrow v_{lim} = v_m \sqrt{\frac{\gamma-1}{1+\gamma}}$$

**Q42.** Par conservation du débit :  $D_m = \rho_e S_e v_e = \rho_e v_m S_{col} G(\alpha_c)$ . Si on utilise l'expression du débit avec  $G(\alpha)$  à l'entrée et qu'on regarde simplement la courbe, on obtient à nouveau une contradiction apparente. On a donc

$$\frac{S_{col}}{S_e} = \frac{v_e}{v_m G(\alpha_c)}$$

Graphiquement, on lit  $G(\alpha_c) \approx 5$  et on a  $v_m \approx 1000 \text{ m.s}^{-1}$  donc  $\frac{S_{col}}{S_e} \approx 0,02$ .

**Q43.** On avait  $v_{lim} = v_m \sqrt{\frac{\gamma-1}{1+\gamma}}$  avec  $v_m = \sqrt{2c_p T_e}$ . Or  $c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}$ , ce qui donne bien  $v_{lim} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_e}{(1+\gamma)M}}$ .

De plus, d'après la loi des gaz parfaits,  $\frac{RT_e}{M} = \frac{P_e}{\rho_e}$ . On utilise alors la loi de LAPLACE écrite précédemment :  $\rho(x) = \rho_e \left( \frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$  donc  $\frac{P_e}{\rho_e} = \frac{P}{\rho} \left( \frac{P}{P_e} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ . Si on se place au col,  $\frac{P}{P_e} = \alpha_c = \left( \frac{2}{1+\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ .

Finalement,  $\frac{RT_e}{M} = \frac{P}{\rho} \alpha_c^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{P}{\rho} \frac{1+\gamma}{2}$ , ce qui donne bien en reportant  $v_{lim} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ .

**Q44.** A la sortie,  $P = P_{atm} = P(\alpha_c)$  donc  $P_e = \frac{P_{atm}}{\alpha_c}$  soit en remplaçant  $P_e = P_{atm} \left( \frac{1+\gamma}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ .

Application numérique :  $P_e = 64,3 \text{ kPa}$

**Q45.** Pour une vitesse plus élevée, il faut diminuer encore  $P(x)$  donc  $\alpha$ .  $G$  diminue alors (pour  $\alpha < \alpha_c$ ), donc si on maintient un débit constant ( $D_m = \rho_e v_m S(x) G(x)$ ) alors  $S$  doit maintenant croître : il faut donc une tuyère qui converge jusqu'au col puis divergente ensuite.

**\*\*\* FIN DU CORRIGE \*\*\***