

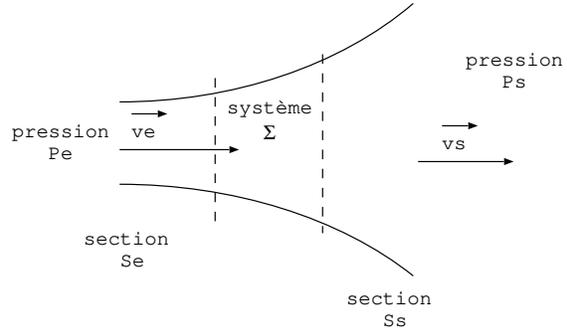
# Oraux janvier 2024

## I. Cours: Mécanique des fluides

1. Définir le nombre de Reynolds et donner son expression. Que dire d'un écoulement à fort nombre de Reynolds? à faible nombre de Reynolds?

2. On donne  $(\vec{A} \cdot \text{grad})\vec{A} = \text{rot}\vec{A} \wedge \vec{A} + \frac{1}{2}\text{grad}(\vec{A}^2)$ . Enoncer et démontrer la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses (pour un écoulement non irrotationnel). Préciser le sens physique de cette relation. Que devient la relation lorsqu'on ajoute l'hypothèse selon laquelle l'écoulement est irrotationnel?

3. Soit un fluide en écoulement, on définit un volume de contrôle entre deux parois fictives fixes. Ce volume de contrôle constitue le système ouvert  $\Sigma$ . On note  $\delta m_e$  et  $\delta m_s$  les masses entrante et sortante de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$ , respectivement aux vitesses  $\vec{v}_e$  et  $\vec{v}_s$ . On se place en régime stationnaire.



3.a. Montrer, en utilisant le système ouvert  $\Sigma$ , que les débits massiques à l'entrée et à la sortie sont égaux.

3.b. Définir le système fermé  $\Sigma^*(t)$  et  $\Sigma^*(t + dt)$  et montrer que les débits massiques en entrée et en sortie sont égaux.

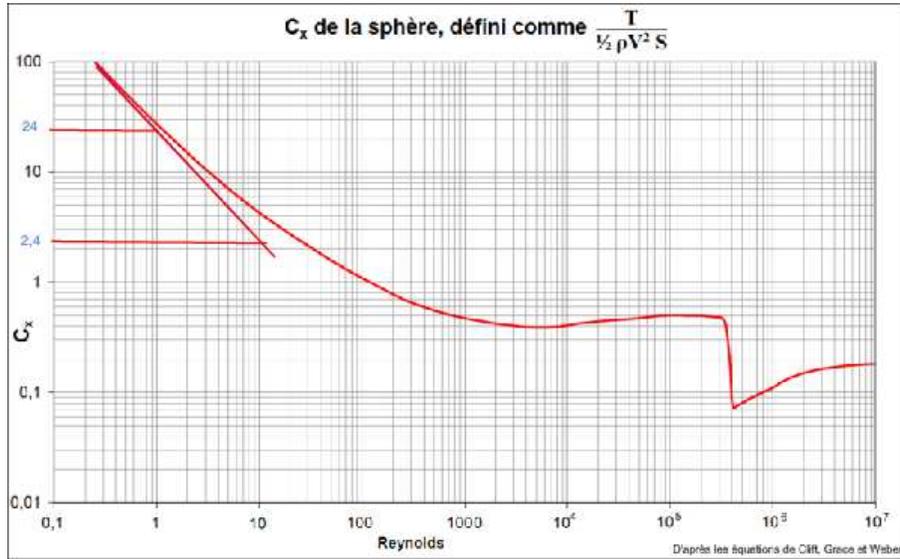
3.c. Exprimer  $\frac{d\vec{p}_{\Sigma^*}}{dt}$ .

3.d. Exprimer  $\frac{dE_{c,\Sigma^*}}{dt}$ .

3.e. Enoncer la loi de la quantité de mouvement et le théorème de la puissance mécanique.

## II. Mouvement d'une sphère dans un fluide

On donne la courbe représentant le coefficient de traînée  $C_x$  en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement d'un fluide de masse volumique  $\rho$ , de viscosité  $\eta$ , autour d'une sphère de rayon  $R$ . On note  $Re$  le nombre de Reynolds de l'écoulement du fluide autour de cette sphère. On rappelle l'expression de la force de traînée  $F = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$ .



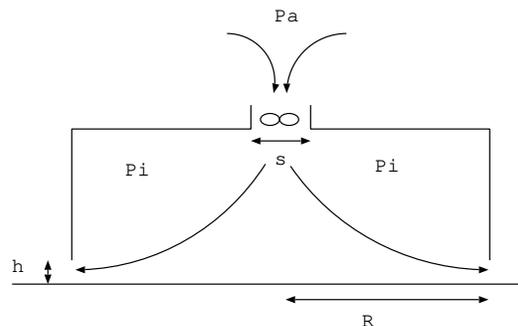
On étudie ici l'écoulement de l'eau autour d'une bactérie. La bactérie de rayon  $R = 100 \mu m$  se déplace à la vitesse  $v = 2 \text{ mm.s}^{-1}$  dans l'eau liquide de viscosité  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ .

1. Estimer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'eau autour de la bactérie.
2. Préciser la particularité de la courbe donnant  $\log C_x$  en fonction de  $\log Re$  dans le domaine des valeurs du nombre de Reynolds trouvé pour la bactérie. En déduire l'expression de  $C_x$  en fonction de  $Re$  puis l'expression de la force de traînée dans ce domaine.

Réponses : 1-  $Re = 0,4$  2-  $C_x = \frac{24}{Re}$  et  $F = 6\pi R\eta v$

## III. Hydroglisseur

Un hydroglisseur est assimilé à un cylindre de rayon  $R = 5 \text{ m}$  de masse  $M = 8,0 \text{ tonnes}$  dont l'extrémité inférieure se maintient à une hauteur  $h = 3,0 \text{ cm}$  au dessus de l'eau parfaitement plate d'un lac. Il glisse sur un coussin d'air assuré par l'aspiration (partie supérieure) d'air atmosphérique à pression  $P_a = 10^5 \text{ Pa}$  grâce à un ventilateur de section  $s = 1,0 \text{ m}^2$ . Cet air se répartit à pression  $P_i$  dans la cavité cylindrique de section  $S = \pi R^2 = 78,5 \text{ m}^2$ . Puis l'air est expulsé sur le pourtour circulaire de périmètre  $L = 2\pi R = 31,4 \text{ m}$ .



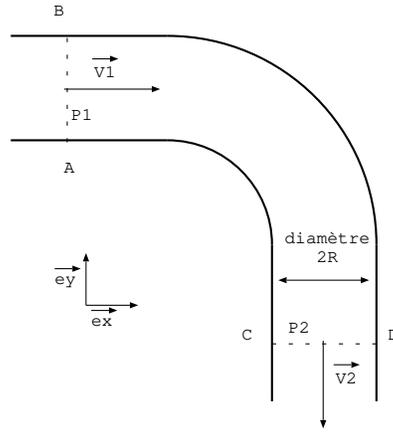
L'écoulement est parfait, incompressible et de masse volumique uniforme  $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ .

1. En identifiant les forces appliquées à l'hydroglisseur, montrer que  $P_i = P_a + \frac{Mg}{S}$ . effectuée.
2. Déterminer les expressions et valeurs des vitesse d'entrée  $v_e$  (juste après l'hélice) et de sortie  $v_s$  de l'écoulement. On néglige la pesanteur.
3. On note  $\Sigma$  le système ouvert compris entre les sections placées juste avant et juste après l'hélice. On note  $\delta m_e$  la masse de fluide qui entre dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  et  $\delta m_s$ , la masse qui en sort. Définir le système fermé  $\Sigma^*$  aux instants  $t$  et  $t + dt$  et exprimer la puissance de l'hélice sur le fluide. On néglige la pesanteur.

Réponses: 2-  $v_e s = v_s 2Lh$  3-  $P_{helice} = (P_i - P_a)v_e s$

## IV. Force sur un coude

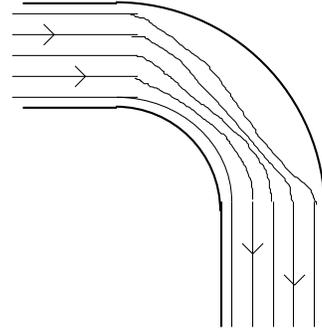
Un fluide parfait et incompressible de masse volumique  $\rho$  s'écoule dans une canalisation cylindrique de rayon  $R$  présentant un coude. On néglige les effets de pesanteur. On définit le système ouvert noté  $\Sigma$  compris entre les parois fixes  $AB$  et  $CD$ . On note avec un indice 1 les grandeurs physiques du fluide à l'entrée du coude et avec un indice 2 celles en sortie du coude. On se place en régime stationnaire. On note  $D_v$  le débit volumique.



1. Déterminer la relation simple entre  $v_1$  et  $v_2$ . En déduire la relation simple entre  $P_1$  et  $P_2$ .
2. Définir soigneusement un système fermé  $\Sigma^*$  à partir du système ouvert  $\Sigma$ . On note  $\Sigma^*$  le système fermé. Exprimer la dérivée de la quantité de mouvement de  $\Sigma^*$  par rapport au temps en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$ ,  $R$  et des vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .
3. Déduire de la loi de la quantité de mouvement, l'expression de la force exercée par le fluide sur le coude en fonction de  $\rho$ ,  $D_v$ ,  $P_1$ ,  $R$  et des vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .
4. On donne les lignes de courant dans le coude. Commenter ces lignes pour prévoir la direction et le sens de la force de pression exercée par le fluide sur le coude.

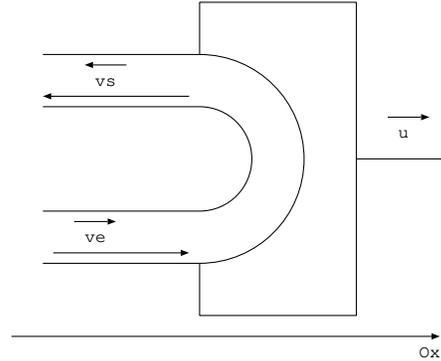
Réponses: 1-  $v_1 = v_2$  et  $P_1 = P_2$

$$3- \vec{F}_{\text{fluide/coude}} = \left( \frac{\rho D_v^2}{\pi R^2} + P_1 \pi R^2 \right) (\vec{e}_y + \vec{e}_x)$$



## V. Auget mobile (pour les 5/2)

Un auget est mis en mouvement de translation à la vitesse  $\vec{u} = u\vec{e}_x$  par un jet d'eau à la vitesse  $\vec{v}_e = v_e\vec{e}_x$  qui rebondit en gardant une section  $s$  identique (on a  $v_e > u$ ). La masse volumique de l'eau est notée  $\rho$ . Les vitesses sont données dans le référentiel terrestre.



1. On se place dans le référentiel lié à l'auget pour que l'écoulement soit stationnaire (dans le référentiel terrestre, l'auget se déplace). Déduire d'un bilan de masse, la vitesse du jet de retour dans le référentiel lié à l'auget puis  $\vec{v}_s$ , la vitesse du jet de retour dans le référentiel terrestre.
2. On se place dans le référentiel lié à l'auget pour que l'écoulement soit stationnaire. Déterminer la force exercée par le fluide sur l'auget en négligeant le poids et les forces de pression de l'air. En déduire la puissance de cette force.
3. On définit le rendement de ce dispositif par le rapport de la puissance de la force de l'eau sur l'auget sur la puissance cinétique du jet incident définie par  $P_e = \frac{1}{2} D_m v_e^2$ . Déterminer la relation entre  $v_e$  et  $u$  pour que le rendement soit maximal.

Réponses: 1-  $\vec{v}_s = 2\vec{u} - \vec{v}_e$  2- on applique la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel lié à l'auget  $P = 2\rho S(v_e - u)^2 u$  3-  $P_e = \frac{\rho S v_e^3}{2}$  et  $3u = v_e$

## VI. Cours: Ondes mécaniques

1. On étudie un milieu dans lequel se propage une onde selon  $Ox$ . On note  $s(x, t)$  la perturbation associée à cette onde.

1.a. Qu'est-ce qu'une onde transversale? Donner deux exemples. Qu'est-ce qu'une onde longitudinale? Donner deux exemples.

1.b. Ecrire l'équation de propagation vérifiée par  $s(x, t)$  en absence de dispersion.

1.c. On appelle  $c$ , la célérité de l'onde. Rappeler l'expression de  $c$  pour une onde le long d'une corde vibrante de masse linéique  $\mu$  soumise à la tension  $T_0$ . Rappeler l'expression de  $c$  pour une onde sonore dans un solide de module d'Young  $Y$  et de masse volumique  $\rho$ . Commenter.

1.d. Dans quel cas retient-on une solution en onde progressive? une solution en onde stationnaire?

1.e. Ecrire  $s(x, t)$  pour une OPPH se propageant selon  $+Ox$  avec une amplitude  $s_0$ .

1.f. Pour une corde de longueur  $l$  fixée aux deux bouts, établir l'expression des fréquences propres de cette corde. Ecrire  $s_3(x, t)$ , perturbation associée au mode propre  $n = 3$ .

1.g. Qu'appelle-t-on des ventres de vibration? des noeuds de vibration? quelle distance sépare deux noeuds consécutifs? deux ventres consécutifs? un ventre et un noeud consécutif?

1.h. Donner l'expression de la vitesse de phase. Quelle est sa particularité dans un milieu dispersif? Donner un exemple de milieu dispersif et commenter.

1.i. Dans le dispositif de la corde de Melde, on observe un seul ventre pour  $f = 150 \text{ Hz}$ ,  $L = 2 \text{ m}$  et  $T_0 = 2000 \text{ N}$  (tension de la corde). Représenter la corde et calculer sa masse.

2. On étudie les ondes transversales sur une corde de masse linéique  $\mu$  tendue sous l'action de la force de norme  $T_0$ . On note  $y(x, t)$  la position d'un point de la corde d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . On note  $\alpha(x, t)$  l'angle que fait la corde par rapport à l'horizontale au point d'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ . On note  $\vec{T}_d(x, t)$  la force de tension exercée sur le point de la corde placée à l'abscisse  $x$  de la part de la corde à sa droite. On néglige le poids. On se place dans l'approximation des petits mouvements.

Montrer que la norme de la tension est uniforme sur toute la corde.

Etablir l'équation de propagation vérifiée par  $y(x, t)$ .

Exprimer la célérité des ondes pour une corde de piano cylindrique de masse volumique  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ , de rayon  $a$  et tendue sous  $T_0$ .

3. On étudie la propagation d'ondes selon  $Ox$  dans un solide de masse volumique  $\rho$  et de module d'Young  $E$ . On note  $u(x, t)$  le déplacement à l'instant  $t$  de la section  $S$  de solide placée en  $x$  au repos. On note  $\vec{F}_d(x, t)$ , la force exercée sur la surface  $S$  de solide en  $x$  à l'instant  $t$  par le solide à sa droite. La force suit la loi de Hooke:  $\vec{F}_d(x, t) = ES \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x$ .

Préciser l'unité du module d'Young. Que dire de deux matériaux de module d'Young différents tels que  $E_1 > E_2$ ?

Montrer que le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  désigne l'allongement relatif du système élémentaire de section  $S$  compris entre  $x$  et  $x + dx$  en absence d'ondes.

Etablir l'équation de propagation vérifiée par  $u(x, t)$ .

Donner un ordre de grandeur de la célérité des ondes sonores dans un solide.

4. On modélise un solide par des chaînes linéaires d'atomes identiques de masse  $m$  reliés entre eux par des ressorts de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $a$  ( $a$  représente la distance à l'équilibre entre deux atomes voisins). On étudie une chaîne d'atomes selon  $Ox$ .

4.a. On note  $na$  la position à l'équilibre de l'atome  $n$  et  $u_n(t)$ , le déplacement de l'atome  $n$  à l'instant  $t$  par rapport à sa position d'équilibre. Ecrire la RFD appliquée à l'atome  $n$ .

4.b. On construit par continuité une fonction  $u(x, t)$  qui caractérise le déplacement à l'instant  $t$  de l'atome qui se trouve en  $x$ . On a  $u(x = (n - 1)a, t) = u_{n-1}(t)$ ,  $u(x = na, t) = u_n(t)$  et  $u(x = (n + 1)a, t) = u_{n+1}(t)$ .

Donner la condition portant que  $a$  et la longueur d'onde  $\lambda$  pour valider l'existence de  $u(x, t)$ .

Etablir l'équation de propagation vérifiée par  $u(x, t)$ .

**5.** On note  $P_0$  et  $\mu_0$ , la pression et la masse volumique du fluide à l'équilibre.

On note  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ ,  $\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$  et  $\vec{v} = v(x, t)\vec{e}_x$ , la pression, la masse volumique du fluide et la vitesse de la tranche de fluide en  $x$  à l'instant  $t$  en présence d'une onde qui se propage selon  $+Ox$ . On néglige la pesanteur.

**5.a.** Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

**5.b.** Ecrire la relation entre  $\chi_S$ ,  $\mu(x, t)$ ,  $\rho_0$  et  $p(x, t)$ . Justifier l'hypothèse selon laquelle les transformations du fluide sont isentropiques en présence de l'onde.

**5.c.** Le fluide est supposé parfait et on néglige le poids. Ecrire l'équation d'Euler et en déduire l'équation mécanique reliant  $p(x, t)$  et  $v(x, t)$ .

**5.d.** Ecrire l'équation de conservation de la masse. En déduire la relation entre  $\mu(x, t)$  et  $v(x, t)$ .

**5.e.** Déduire des équations, l'équation de propagation vérifiée par  $p(x, t)$ . Généraliser cette équation à 3 dimensions.

**6.** Exprimer la célérité des ondes acoustiques en fonction de la température  $T$  pour un gaz parfait de masse molaire  $M$  et de coefficient  $\gamma$ .

**7.** Définir par analogie avec la loi d'Ohm électrique la notion d'impédance acoustique. On note  $P_0$  et  $\mu_0$ , la pression et la masse volumique du fluide à l'équilibre. On note  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ ,  $\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$  et  $\vec{v} = v(x, t)\vec{e}_x$ , la pression, la masse volumique du fluide et la vitesse de la tranche de fluide en  $x$  à l'instant  $t$  en présence d'une onde qui se propage selon  $+Ox$ . Ecrire l'équation d'Euler et la simplifier dans l'approximation acoustique. En déduire l'expression de l'impédance acoustique associée à une  $OPPH^+$ . Que devient l'impédance acoustique pour une  $OPPH^-$ ?

**8.** Définir l'intensité acoustique et la calculer pour une  $OPPH^+$  en fonction de  $p_0$  (amplitude de la surpression),  $\rho_0$  et  $c$ . Que devient cette expression pour une  $OPPH^-$ ? Pour une OS?

**9.** L'intensité en décibel est définie par  $I_{dB} = I_0 \log\left(\frac{|I|}{I_0}\right)$  avec  $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ . Une chorale de 10 choristes se produit. Chaque choriste émet une intensité sonore de 50 dB. Calculer l'intensité sonore du chœur en dB.

**10.** Déterminer de façon qualitative (avec des schémas représentant les ondes de vitesse et de surpression), les fréquences propres d'un tuyau sonore de longueur  $L$  :

- ouvert à ses deux extrémités

- ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

**11.** Une source placée en un point  $O$  émet une onde telle que tous les points sur une même sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  ont la même amplitude de perturbation (toutes les directions de l'espace sont équivalentes). La perturbation ne dépend donc que du temps et de  $r$  en coordonnées sphériques: une telle onde s'appelle une onde sphérique.

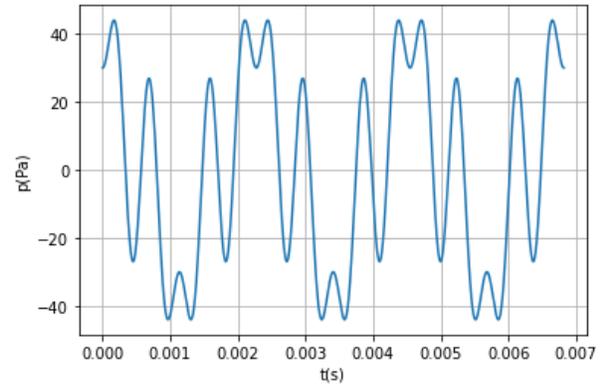
**11.a.** On donne en coordonnées sphériques :  $\Delta p(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rp(r, t))}{\partial r^2}$ . Montrer que  $r.p(r, t)$  vérifie une équation de d'Alembert à une dimension.

**11.b.** Proposer une solution en onde sphérique progressive harmonique. En déduire  $v(r, t)$ . On rappelle l'équation mécanique  $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}$ . Déterminer  $I$ , l'intensité acoustique puis  $P$ , la puissance rayonnée par l'onde à travers une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ . Commenter.

## VII. Tuyau sonore

On donne l'enregistrement d'un tuyau sonore ouvert d'un côté et fermé de l'autre. L'air est à la température  $T = 300\text{ K}$  et est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29\text{ g.mol}^{-1}$  tel que  $\gamma = 1,4$ . Lire la fréquence du son émis et en déduire la longueur de ce tuyau. Proposer l'allure du spectre correspondant.

Réponse:  $L = 20\text{ cm}$

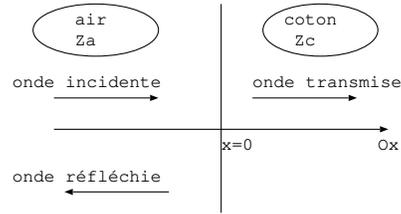


## VIII. Impulsions ultrasonores

On rappelle que la célérité du son dans un gaz est  $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S \rho_0}}$  où  $\chi_S$  est le coefficient de compressibilité isentropique et  $\rho_0$ , la masse volumique du fluide à  $T_0$  et  $P_0$ .

1. Donner la valeur numérique de l'impédance acoustique de l'air considéré comme un GP de masse molaire  $M = 29\text{ g.mol}^{-1}$  avec  $P_0 = 1\text{ bar}$  et  $T_0 = 293\text{ K}$ .

2. On étudie le dioptré air/coton. On note  $\rho_a$  et  $\rho_c$  les masses volumiques respectives de l'air et du coton ainsi que  $c_a$  et  $c_c$  les vitesses de propagation des ondes sonores dans l'air et dans le coton. On note  $Z_a = \rho_a c_a$  et  $Z_c = \rho_c c_c$  les impédances acoustiques de l'air et du coton. Une onde incidente de surpression  $p_i(x, t)$  donne naissance sur le dioptré en  $x = 0$  à une onde réfléchie et une onde transmise de surpressions respectives  $p_r(x, t)$  et  $p_t(x, t)$ .



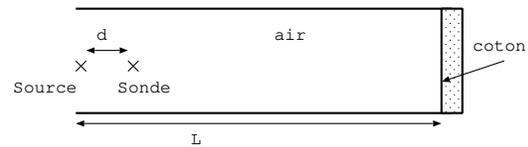
On a  $p_i(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ ,  $p_r(x, t) = r p_0 \cos(\omega t + kx)$  et  $p_t(x, t) = \tau p_0 \cos(\omega t - k'x)$ .

2.a. Donner les expressions de  $k$  et  $k'$  et des ondes de vitesse  $v_i(x, t)$ ,  $v_r(x, t)$  et  $v_t(x, t)$  associées aux trois ondes.

2.b. Ecrire les équations de continuité en  $x = 0$  et en déduire les expressions de  $r$  et de  $\tau$  en fonction de  $Z_a$  et  $Z_c$ .

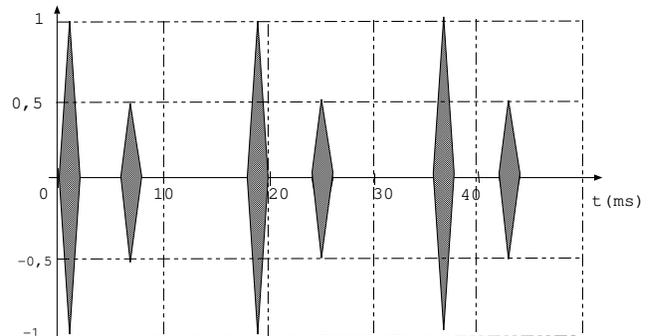
3. Une source qui émet des impulsions ultrasonores très courtes avec une période  $T = 18\text{ ms}$  est placée à l'entrée d'un tuyau sonore cylindrique de longueur  $L = 1,1\text{ m}$ . Le tuyau est rempli d'air et il est fermé en sortie par du coton. Un oscilloscope affiche une image électrique de la pression sonore reçue par une sonde très petite placée à la distance  $d = 10\text{ cm}$  de l'émetteur dans le tuyau. La sonde est sensible à la

surpression des ondes.



3.a. Déterminer à partir de l'oscillogramme la célérité des ondes ultrasonores dans le tuyau.

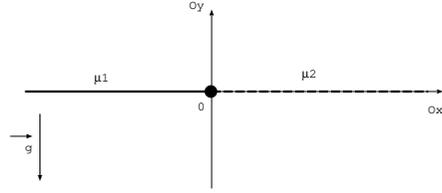
3.b. Déterminer l'impédance acoustique du coton en utilisant le coefficient de réflexion  $r$  défini précédemment.



Réponses: 1-  $Z_a = 412\text{ SI}$  2-  $r = \frac{Z_c - Z_a}{Z_c + Z_a}$  et  $\tau = \frac{2Z_c}{Z_c + Z_a}$  3-  $c = 333\text{ m.s}^{-1}$  et  $Z_c = 3Z_a$

## IX. Deux cordes de masses différentes

Une corde vibrante très longue et donc considérée comme infinie, est soumise à une tension  $T_0$ . Elle est formée d'une corde de masse linéique  $\mu_1$  pour  $x < 0$  et d'une corde de masse linéique  $\mu_2$  pour  $x > 0$ . Elles sont réunies en  $x = 0$  par un noeud.



Les vitesses de propagation des ondes à gauche et à droite du noeud sont notées respectivement  $c_1$  et  $c_2$ . Un générateur d'ondes très loin à gauche crée une onde incidente de la forme  $y_i(x, t) = y_0 \cos(\omega t - k_1 x)$ . Arrivée sur le noeud, cette onde met celui-ci en mouvement transversal, de même pulsation que l'onde incidente. A son tour, le mouvement du noeud génère deux ondes qui en partent l'une vers la gauche, appelée onde réfléchie notée  $y_r(x, t) = r y_0 \cos(\omega t + k_1 x)$ . et l'autre vers la droite, appelée onde transmise notée  $y_t(x, t) = \tau y_0 \cos(\omega t - k_2 x)$ .

On néglige le poids et la raideur de la corde et on travaille dans l'approximation des petits mouvements (les angles sont petits et les points de la corde ont un mouvement vertical).

1. Rappeler sans démonstration les expressions des vitesses  $c_1$  et  $c_2$  des ondes respectivement pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$  et les expressions de  $k_1$  et  $k_2$ .
2. Donner sans démonstration les équations vérifiées par  $y_i(x, t)$ ,  $y_r(x, t)$  et  $y_t(x, t)$ .
3. Montrer que sur la corde, dans l'approximation des petits angles on a  $\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$  où  $\alpha(x, t)$  désigne l'angle que fait la corde par rapport à l'horizontale au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  et  $y(x, t)$  la hauteur du point de la corde en  $x$  à  $t$ .
4. On note  $y(x = 0^-, t)$  et  $y(x = 0^+, t)$ , la hauteur de la corde respectivement juste à gauche et à droite du noeud. Que pensez-vous de ces deux hauteurs? En déduire une première relation entre  $r$  et  $\tau$  (équation (\*)).

**Dans la suite, le noeud est supposé sans masse.**

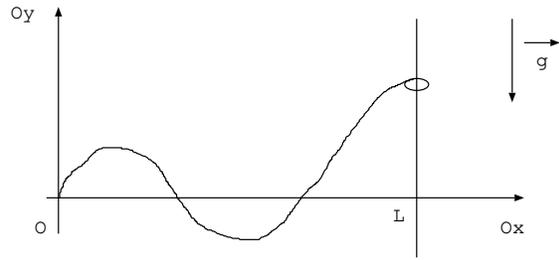
5. Représenter le noeud en  $x = 0$  et les forces qui s'exercent sur lui. Déduire de la RFD appliquée au noeud l'égalité  $\frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^+, t)$ . Enfin déduire de cette égalité une relation entre  $r$ ,  $\tau$ ,  $c_1$  et  $c_2$  (équation (\*\*)).
6. Déduire de la résolution du système composé des équations (\*) et (\*\*), les expressions de  $r$  et  $\tau$  en fonction de  $c_1$  et  $c_2$ . Commenter ces expressions.
7. On se place dans le cas où  $c_1 \gg c_2$ . En déduire  $r$ ,  $\tau$ ,  $y(x > 0, t)$  et  $y(x < 0, t)$ . On donne  $\cos p - \cos q = -2 \sin(\frac{p+q}{2}) \sin(\frac{p-q}{2})$ . Commenter l'onde résultante en  $x < 0$ . Quel point particulier trouve-t-on en  $x = 0$  pour cette onde?

$c_1 \gg c_2$  revient à dire que  $\mu_1 \ll \mu_2$ . Commenter physiquement le fait que  $y(x = 0, t) = 0$ .

Réponses: 4-  $1 + r = \tau$  5-  $1 - r = \frac{c_1 \tau}{c_2}$  6-  $\tau = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}$  et  $r = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}$  7-  $r = -1$  et  $\tau = 0$ ,  $x = 0$  est un noeud

## X. Corde avec une extrémité libre (5/2)

Une corde de longueur  $L$ , de masse linéique  $\mu$ , soumise à la tension  $T$  est fixée en  $x = 0$ . En  $x = L$ , elle est liée à un anneau de masse  $M$  pouvant glisser sans frottement sur une tige. On note  $y(x, t)$  les déplacements transversaux de la corde pour  $0 \leq x \leq L$ . On note  $c$  la vitesse de propagation des ondes sur cette corde.

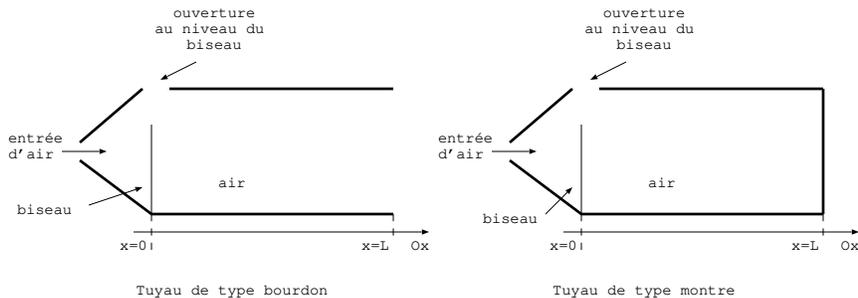


- Déduire de la RFD appliquée à l'anneau la relation entre  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x = L, t)$  et  $\frac{\partial y}{\partial x}(x = L, t)$ . (on négligera le poids de l'anneau devant l'action de la corde sur l'anneau).
- On prend pour les modes propres de rang  $n$  :  $y_n(x, t) = A \cos(\omega_n t) \sin(k_n x + \phi)$ . Préciser le nom de l'onde associée à une telle solution et justifier le choix de cette écriture pour  $y_n(x, t)$ . Montrer que  $\phi = 0$  et rappeler la relation entre  $k_n$  et  $\omega_n$ .
- Montrer que les modes propres vérifient la relation  $\tan\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) = \frac{T}{M\omega_n c}$  (\*).
- On suppose l'anneau très lourd. Déduire de (\*) les fréquences propres du système et vérifier par des schémas le résultats.
- On suppose l'anneau très léger. Déduire de (\*) les fréquences propres du système et vérifier par des schémas le résultats.

Réponses: 1-  $M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x = L, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x}(x = L, t)$  4-  $f_n = \frac{nc}{2L}$  pour  $n \geq 1$  5-  $f_n = \frac{(2n-1)c}{4L}$  pour  $n \geq 1$

## XI. L'orgue (5/2)

Les tuyaux sonores à embouchure de flûte équipent en partie les tuyaux d'orgues. Un tuyau sonore à embouchure de flûte, comprend un biseau: l'air vient frapper ce biseau, il en découle une mise en oscillation de la colonne d'air à l'intérieur du tuyau. Ces tuyaux sont considérés comme des tuyaux ouverts au niveau du biseau. L'autre extrémité du tuyau peut être soit ouverte (ces tuyaux sont dits de type bourdon), soit fermée (ces tuyaux sont dits de type montre).



- Dans cette question on étudie un tuyau de type bourdon de longueur  $L$ .

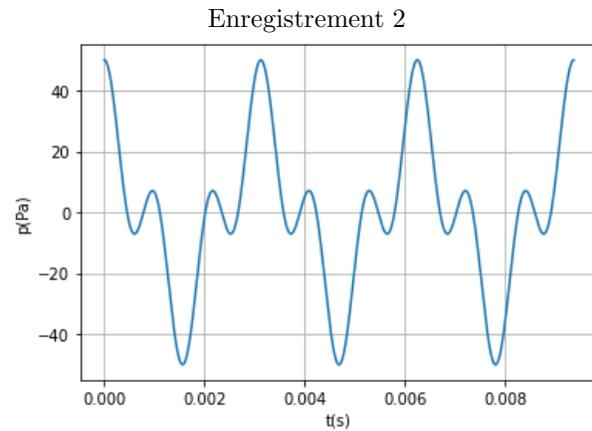
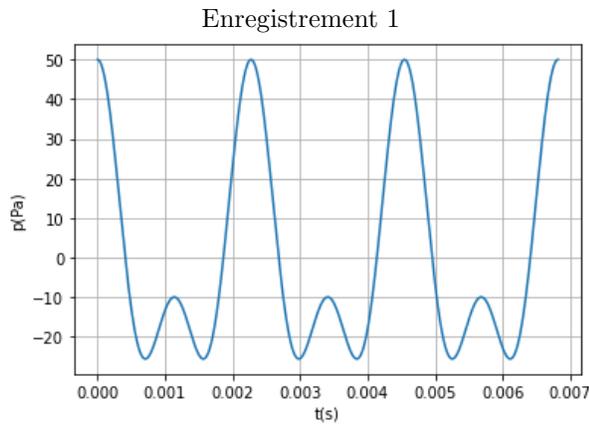
**1.a.** Représenter pour le fondamental et les deux premiers harmoniques les ondes de surpression et de vitesse présentes dans ce tuyau. Exprimer en fonction de  $f$  les fréquences des harmoniques que peut émettre un tel tuyau.

**1.b.** Ce tuyau est accordé en plein hiver à  $15^{\circ}C$  pour produire un son de fréquence  $f = 262 \text{ Hz}$ . En été, l'air dans le tuyau est à  $24^{\circ}C$ , justifier le fait que la fréquence du son émis est modifiée et préciser si ce son est plus aigu ou plus grave qu'en hiver. On note  $f'$  sa fréquence en été. Une oreille moyenne distingue deux sons de fréquence  $f$  et  $f'$  si le rapport  $|\log(\frac{f'}{f})|$  est supérieur à  $5 \cdot 10^{-3}$ . L'oreille moyenne

pourra-t-elle distinguer deux sons émis avec l'écart de température de  $9^{\circ}C$  entre l'hiver et l'été pour ce tuyau?

2. Représenter pour le fondamental et les deux premiers harmoniques les ondes de surpression et de vitesse présentes dans un tuyau de type montre. Exprimer en fonction de  $f$  les fréquences des harmoniques que peut émettre un tel tuyau.

3. On fournit les enregistrements d'un tuyau de type bourdon et d'un tuyau de type montre. En étudiant ces enregistrements et en utilisant les résultats des questions précédentes, préciser celui qui correspond au bourdon et celui qui correspond à la montre en justifiant votre réponse. Lire la fréquence du son émis et en déduire la longueur des tuyaux sachant qu'ils ont été accordés à une température ambiante de  $20^{\circ}C$ . AN: On assimile l'air à un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1,4$  et de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ . On donne  $R = 8,31 \text{ SI}$ .



Réponses: 1-  $f_n = \frac{nc}{2L}$  et  $|\log(\frac{f'}{f})| = 6,7 \cdot 10^{-5}$  2-  $f_n = \frac{(2n-1)c}{4L}$  3- enregistrement 1: type bourdon  $L = 40 \text{ cm}$  et enregistrement 2: type montre  $L = 20 \text{ cm}$