Oraux janvier 2024

I. Correction : mouvement d'une sphère dans un fluide

1. On calcule le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du l'eau autour de la bactérie: $Re = \dfrac{\rho_{eau} v 2R}{\eta_{eau}} = \dfrac{10^3.4.10^{-3}.10^{-4}}{10^{-3}} = 0,4$.

2. Pour les petites valeurs du nombre de Reynolds, $\log C_x$ en fonction de $\log Re$ est approximé par une droite d'équation $\log C_x = a \log Re + b$. Cette droite passe par les points $(Re = 1, C_x = 24)$ et $(Re = 10, C_x = 2,4)$.

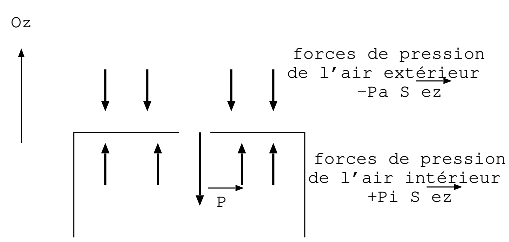
On calcule la pente de la droite $a = \dfrac{\log 24 - \log 2,4}{\log 1 - \log 10} = -1$.

On en déduit b en disant que le point $(Re = 1, C_x = 24)$ appartient à la droite soit $\log 24 = a \log 1 + b$ soit $b = \log 24$ et $\log C_x = -\log Re + \log 24$ donne $C_x = \dfrac{24}{Re}$.

Or pour une sphère, la surface projetée S soit la surface de la sphère perpendiculaire à l'écoulement est πR^2 (surface du disque de rayon R) et le nombre de Reynolds s'écrit $Re = \dfrac{\rho v 2R}{\eta}$. On remplace dans l'expression de la traînée $F = \dfrac{1}{2}\rho \pi R^2 \dfrac{24\eta}{\rho v 2R} v^2 = 6\pi R \eta v$.

II. Correction: hydroglisseur

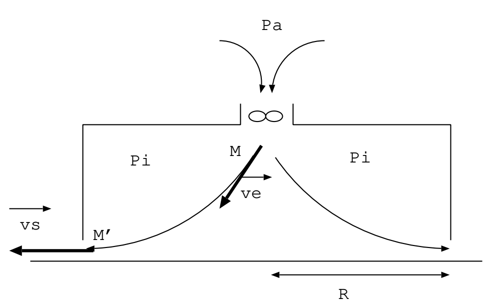
1. L'hydroglisseur subit son poids $\overrightarrow{P} = -Mg\overrightarrow{e_z}$, la force de pression de l'air en dessous $+P_i S\overrightarrow{e_z}$ et la force de pression de l'air en dessus $-P_a S\overrightarrow{e_z}$. A l'équilibre la résultante des forces est nulle soit $-Mg - P_a S + P_i S = 0$ soit $P_i = P_a + \dfrac{Mg}{S}$.



2. On applique la conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible $v_E s = v_s 2\pi R h$ (en sortie, la fluide traverse la surface latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon R).

Le fluide est parfait, l'écoulement incompressible et permanent, il n'y a pas de pièces mobiles on a donc $\dfrac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z$ est une constante sur la ligne de courant entre M et M' (on néglige ensuite $\rho g z$ car on néglige le poids). On a donc $\dfrac{\rho v_e^2}{2} + P_i = \dfrac{\rho v_s^2}{2} + P_0$.

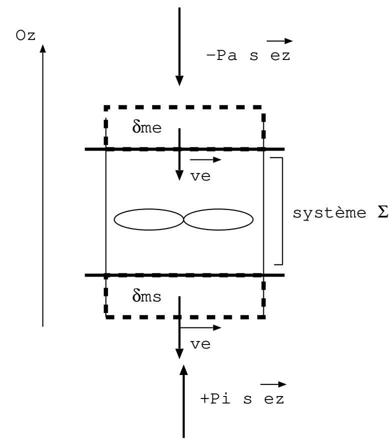
On combine ensuite ces deux équations pour trouver v_e et v_s.



3. On se place dans la section du tube en haut de l'hydroglisseur qui contient l'hélice. On note Σ le système ouvert entre deux parois fictives fixes placées pour l'une, avant l'hélice et pour l'autre, après l'hélice.

On note δm_e la masse entrant dans la conduite entre t et $t + dt$ avant l'hélice et δm_s la masse sortant de la conduite entre t et $t + dt$ après l'hélice. On définit le système fermé Σ^* composé de Σ ajouté de δm_e à l'instant t et de Σ ajouté de δm_s à l'instant $t + dt$. Avec ici $\delta m_e = \delta m_s = \rho D_v dt$ où $D_v = v_e s$ est le débit volumique.

Le système Σ^* subit les forces de pression en entrée et en sortie, (la force poids est négligée), la force de la canalisation sur le fluide (qui est perpendiculaire à la canalisation en tout point donc la puissance est nulle) et la force de l'hélice sur le fluide.



On applique le théorème de la puissance cinétique (comme on néglige le poids, l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique) à Σ^* entre t et $t + dt$ soit:

$$\frac{dE_{c,\Sigma^*}}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

avec $P_{int} = 0$ car le fluide est parfait

avec $dE_{c,\Sigma^*} = (E_{m,\Sigma} + \frac{\delta m_s v_e^2}{2}) - (E_{m,\Sigma} + \frac{\delta m_e v_e^2}{2}) = 0$

avec $P_{ext} = P_a s v_e - P_i s v_e + P_{helice} = (P_a - P_i) v_e s + P_{helice}$ soit $P_{helice} = (P_i - P_a) v_e s$.

III. **Correction : force sur un coude**

1. Ecoulement incompressible : conservation du débit volumique $v_1 = v_2$

Hypothèses: écoulement permanent, fluide parfait et incompressible, pas de pièces mobiles

Bernoulli sur une ligne de courant entre AB et DC: $\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2$ soit $v_1 = v_2$ donne $P_1 = P_2$

2. On définit un système fermé Σ^* qui, à l'instant t, est constitué de Σ et d'une masse entrante $\delta m_e = D_m dt$ à la vitesse $\overrightarrow{v_1}$ et, à l'instant $t + dt$ est constitué de Σ et d'une masse sortante $\delta m_s = D_m dt$ à la vitesse $\overrightarrow{v_2}$.

$$\overrightarrow{p^*}(t+dt) - \overrightarrow{p^*}(t) = \overrightarrow{dp^*} = \overrightarrow{p} + \delta m_s \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{p} - \delta m_e \overrightarrow{v_1} = D_m dt(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) = \rho D_v dt v_1(-\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_x}) = \frac{\rho D_v^2 dt}{\pi R^2}(-\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_x}).$$

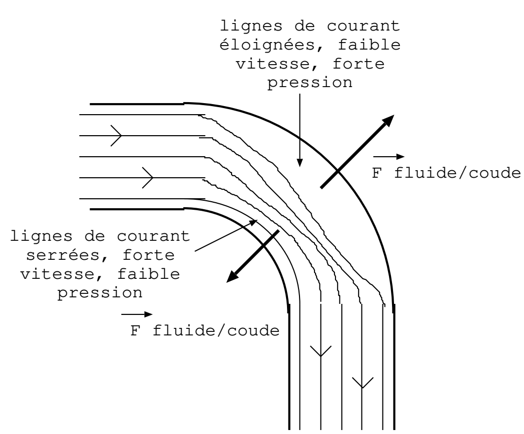
3. Forces exercées sur le fluide: poids : négligé, pression $P_1 \pi R^2 \overrightarrow{e_x} + P_2 \pi R^2 \overrightarrow{e_y} = P_1 \pi R^2 (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})$ et la force du coude sur le fluide (1 *point*).

On applique la loi de la quantité de mouvement au système fermé Σ^* : $\frac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$

$$\frac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = P_1 \pi R^2 (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}) + \overrightarrow{F}_{coude/fluide} = \frac{\rho D_v^2}{\pi R^2}(-\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_x}) \text{ d'où } \overrightarrow{F}_{coude/fluide} = -(\frac{\rho D_v^2}{\pi R^2} + P_1 \pi R^2)(\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x})$$

On a ensuite $\overrightarrow{F}_{coude/fluide} = -\overrightarrow{F}_{fluide/coude}$.

4.



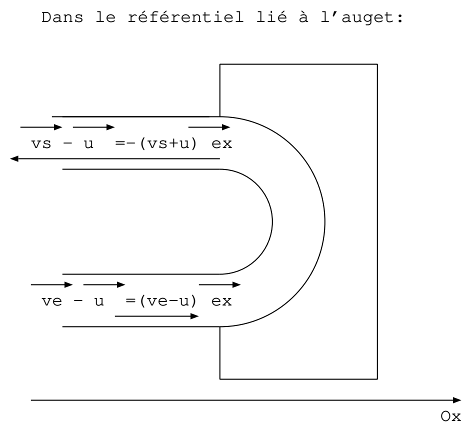
IV. **Correction: auget**

1. Le référentiel lié à l'auget est en translation rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre galiléen, donc il est galiléen.

On applique la loi de composition des vitesses: $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$ avec $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{u}$. On a donc $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{u}$.

La vitesse du fluide à l'entrée dans le référentiel de l'auget est: $\overrightarrow{v_{re}} = \overrightarrow{v_e} - \overrightarrow{u} = (v_e - u)\overrightarrow{e_x}$.

La vitesse du fluide à la sortie dans le référentiel de l'auget est: $\overrightarrow{v_{rs}} = \overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{u} = -(v_s + u)\overrightarrow{e_x}$.



Dans le référentiel de l'auget, on définit un système Σ ouvert situé entre deux parois fixes à l'entrée et à la sortie. Entre t et $t + dt$, la masse qui entre dans ce système est $\delta m_e = \rho(v_e - u)s$ et la masse qui sort de ce système est $\delta m_s = \rho(v_s + u)s$.

En régime stationnaire, la masse qui entre est égale à la masse qui sort soit $v_e - u = v_s + u$ soit $v_s = v_e - 2u$.

2. On définit le système fermé Σ^* composé:

- à l'instant t de Σ ajouté de la masse δm_e

- à l'instant $t + dt$ de Σ ajouté de la masse δm_s

On applique la loi de la quantité de mouvement au système fermé Σ^* dans le référentiel de l'auget: $\dfrac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{auget/fluide}}$ (dans les forces extérieures il y a le poids et les forces de pression qui sont négligés, et la force exercée par l'auget sur le fluide).

Avec $d\overrightarrow{p_{\Sigma^*}} = \rho D_v(\overrightarrow{v_{rs}} - \overrightarrow{v_{re}}) = \rho D_v(-(v_s + u) - (v_e - u))\overrightarrow{e_x} = -\rho D_v(v_s + v_e)\overrightarrow{e_x} = -\rho D_v(v_e - 2u + v_e)\overrightarrow{e_x} = -2\rho D_v(v_e - u)\overrightarrow{e_x}$ avec $D_v = s v_{re} = s(v_e - u)$ soit $\overrightarrow{F_{fluide/auget}} = \overrightarrow{F_{auget/fluide}} = \dfrac{d\overrightarrow{p}}{dt} = 2\rho s(v_e - u)^2\overrightarrow{e_x}$.

La puissance de cette force est égale à la force scalaire la vitesse de l'auget $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$ soit $P = 2\rho s(v_e - u)^2 u$.

3. Le rendement est $r = \dfrac{P}{P_e} = \dfrac{2\rho s(v_e - u)^2 u}{\frac{1}{2}\rho s v_e^2} = \dfrac{4(v - e - u)^2 u}{v_e^2}$. On cherche v_e tel que $\dfrac{dr}{dv_e} = 0$.

V. **Correction cours: Ondes mécaniques**

1.

1.a. Une onde transversale est telle que la direction de la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation. Exemples: ondes sur une corde, ondes électromagnétiques (la perturbation est le champ électrique et le champ magnétique qui sont perpendiculaires à la direction de propagation).

Une onde longitudinale est telle que les direction de la perturbation et de la propagation sont identiques. Exemples: ondes sonores et ondes sur un ressort.

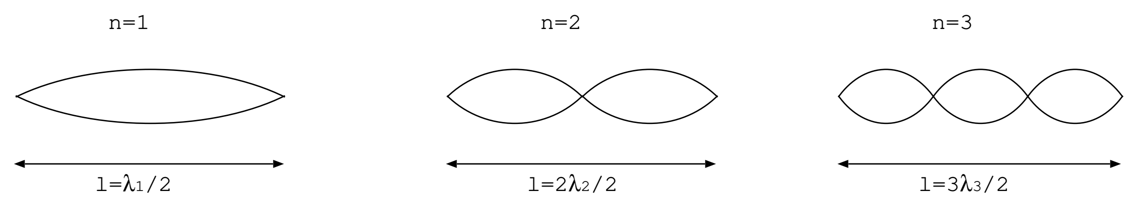
1.b. En absence de dispersion, l'équation de propagation vérifiée par $s(x,t)$ est l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0$ où c représente la vitesse de propagation de l'onde.

1.c. Pour une corde: $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$. Pour un solide: $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$. Dans les deux cas, les ondes vont d'autant plus vite que le milieu est rigide (T_0 grand pour la corde et E grand pour le solide) et peu dense (μ petit pour la corde et ρ petit pour le solide).

1.d. On choisit une solution en OPP dans un milieu de propagation de taille infinie. On choisit une solution en onde stationnaire, lorsque le milieu de propagation est de taille finie. En effet dans ce cas, il y a une multitude d'ondes réfléchies aux extrémités du milieu de propagation et la superposition de toutes des ondes peut donner une OS pour certaines fréquences.

1.e. La solution en $OPPH^+$ s'écrit $s(x,t) = s_0\cos(\omega t - kx + \phi)$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1.f. Sur une corde fixée à ces deux extrémités, il y a une multitude d'ondes réfléchies aux extrémités du milieu de propagation et la superposition de toutes des ondes peut donner une OS pour certaines fréquences appelées fréquences de résonance. Les OS qui se forment sur la corde ont un noeud à chaque extrémité (puisque la corde est fixée aux extrémités).



Par récurrence on a $l = n\dfrac{\lambda_n}{2}$ et donc $f_n = \dfrac{c}{\lambda_n} = n\dfrac{c}{2l}$.

Le mode propre de rang $n = 3$ s'écrit $s_3(x,t) = s_0\cos(\omega_3 t)\cos(k_3 x + \phi)$ avec $\omega_3 = 2\pi f_3 = 2\pi\dfrac{3c}{2l}$ et $k_3 = \dfrac{2\pi}{\lambda_3} = \dfrac{2\pi 3}{2l} = \dfrac{3\pi}{l}$.

1.g. Les noeuds sont les points de valeur de signal nulle à chaque instant: on trouve leur position en résolvant $s(x,t) = 0$. Les ventres qui sont les points de valeur de signal maximale à tout instant. La distance entre deux noeuds consécutifs (ou entre deux ventres consécutifs) est $\lambda/2$ et la distance entre un noeud et un ventre consécutifs est $\lambda/4$.

1.h. La vitesse de phase d'une OPPH est définie par $v_\phi = \dfrac{\omega}{k}$. Dans un milieu dispersif, la vitesse de phase n'est pas constante, elle dépend de la fréquence. Cela signifie que les ondes de fréquences (ou de longueurs d'onde) différentes se propagent à des vitesses différentes.

Un exemple de milieu dispersif est le verre. L'indice du verre dépend de la longueur d'onde, donc les ondes lumineuses de couleurs différentes (de fréquences différentes) ne suivent pas le même chemin, c'est le cas dans un prisme par exemple, lorsqu'on éclaire un prisme avec le lumière blanche, on observe en sortant du prisme le spectre de la lumière blanche.

1.i. Le dispositif de la corde de Melde présente à une de ses extrémités un excitateur sinusoidal qui émet une OPPH de fréquence f, l'autre extrémité de la corde est fixe. L'OPPH émise se propage et subit multiples réflexions sur chaque extrémité de la corde. L'onde résultante est la somme de toutes les ondes réfléchies. Pour certaines fréquences l'onde résultante est une OS de grande amplitude (lorsque toutes les ondes réfléchies sont en phase), c'est le phénomène de résonance. A résonance, les extrémités de la corde sont des noeuds.

Ici on n'observe un seul ventre donc un seul fuseau on a donc $L = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{c}{2f}$ où la célérité des ondes est $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{T_0 L}{m}}$. En combinant ces équations on trouve $m = \dfrac{T_0}{4f^2L}$.

2. Voir cours OM1 pages 1 et 2.

3. Voir cours OM1 page 4.

4. Voir cours OM1 pages 4 et 5.

5. **5.a.** L'approximation acoustique consiste à dire que $v(x,t)$, $\mu(x,t)$ et $p(x,t)$ sont des infiniments petits d'ordre 1. On linéarise les équations mécanique et thermodynamique en faisant des DL à l'ordre 1 en $v(x,t)$, $\mu(x,t)$ et $p(x,t)$.

5.b. Les tranches de fluide subissent des compressions et des détentes qui se propagent de proche en proche. On suppose que ces transformations sont suffisamment rapides pour que les tranches de fluide n'aient pas le temps d'échanger du transfert thermique avec les tranches de fluide voisines d'où l'hypothèse de transformations adiabatiques. On suppose que les inhomogénéités de températures et de pressions sont faibles, ce qui revient à dire que l'on néglige les irréversibilités. Les transformations sont adiabatiques et réversibles, elles sont donc isentropiques.

Par définition $\chi_S = \dfrac{-1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial P} = +\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial P} \approx \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\rho-\rho_0}{P-P_0} \approx \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\mu(x,t)}{p(x,t)}$.

5.c. Voir chapitre OM2 page 2.

5.d. Voir chapitre OM2 page 3.

5.e. Voir chapitre OM2 page 3.

6. Voir chapitre OM2 page 4.

7. Dans la loi d'Ohm $U = Ri$, U est la différence de potentiel qui met en mouvement les charges. Dans les ondes sonores, $p = P - P_0$ est la différence de pression qui met en mouvement les tranches de fluide donc l'analogue de U est p. i est le débit de charges et v est le débit volumique de fluide à travers une surface unité ($D_v = v.S$), l'analogue de i est donc v, la vitesse des tranches de fluide. Ainsi on définit l'impédance acoustique par $Z = \dfrac{p}{v}$.

On prend pour solution de l'équation de d'Alembert, une solution en $OPPH^+$ soit $p(x,t) = p_0\cos(\omega t - kx)$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

On écrit l'équation d'Euler et on en fait un DL à l'ordre 1 en v, p et μ:

$\rho(\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{\text{gradP}}$ (on néglige le poids)

Soit $(\rho_0 + \mu)\dfrac{\partial v}{\partial t}\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{e_x}$ (l'accélération convective est négligée, elle est d'ordre 2 en vitesse)

Soit en ne gardant que les termes d'ordre 1: $\rho_0\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$.

On en déduit la vitesse: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x}(p_0\cos(\omega t - kx)) = \dfrac{-kp_0}{\rho_0}\sin(\omega t - kx)$ soit en intégrant par rapport au temps $v(x,t) = \dfrac{kp_0}{\omega\rho_0}\cos(\omega t - kx)$.

Ainsi $Z = \dfrac{p}{v} = \dfrac{\omega\rho_0}{k} = \rho_0 c$. Pour une $OPPH^-$, on a $Z = \dfrac{p}{v} = -\rho_0 c$.

8. Voir cours.

9. Attention ce ne sont pas les intensités en dB qui s'ajoutent. En effet 50dB fois 10, on atteint 500dB!!! Ce sont les intensités acoustiques qui s'ajoutent soit pour une personne: $I_1 = I_0 10^{50/10} = 10^{-7}\ W.m^{-2}$. L'intensité de la chorale est donc $I_c = 10 I_1 = 10^{-6}\ W.m^{-2}$ d'où en décibel $I_{c,dB} = 10\log(\dfrac{I_c}{I_0}) = 60\ dB$.

10. Voir cours.

VI. **Correction: enregistrement**

On lit $3T = 6,8\ ms$ d'où $T = 2,3\ ms$ et la fréquence du son émis $f = \dfrac{1}{T} = 435\ Hz$ (fréquence du fondamental).

Dans le tuyau se forme une OS avec un noeud de vitesse et un ventre de surpression sur l'extrémité fermée et un noeud de surpression et un ventre de vitesse sur l'extrémité ouverte. Dans le mode fondamental, on a $L = \dfrac{\lambda}{4}$ (distance entre un noeud et un ventre consécutifs). Soit $L = \dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{c}{4f}$ avec $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}} = 345\ m.s^{-1}$ et $L = 20\ cm$.

VII. **Correction : Impulsions ultrasonores**

1. Pour un GP: $\rho = \dfrac{PM}{RT} = \dfrac{10^5.29.10^{-3}}{8,3.293} = 1,2\ kg/m^3$ (à 20^0C sous 1 bar), de plus $\chi_S = \dfrac{1}{\gamma P} = \dfrac{1}{1,4.10^5} = 0,71.10^{-5}\ Pa^{-1}$ (savoir faire la démonstration de l'expression de χ_S), on en déduit la célérité des ondes sonores $c = 343\ m/s$.

L'impédance acoustique de l'air est $Z_{air} = \rho.c = 1,2.343 = 412\ kg.m^{-2}.s^{-1}$.

2.

2.a. Dans l'air on a $k = \dfrac{\omega}{c_a}$ et dans le coton $k' = \dfrac{\omega}{c_c}$.

On utilise $Z = \dfrac{p}{v} = +\rho c$ pour une $OPPH^+$ et $Z = \dfrac{p}{v} = -\rho c$ pour une $OPPH^-$.

Pour l'onde incidente ($OPPH^+$): $p_i(x,t) = p_0\cos(\omega t - kx)$ et $v_i(x,t) = \dfrac{p_0}{Z_a}\cos(\omega t - kx)$ avec $Z_a = +\rho_a c_a$

Pour l'onde réfléchie ($OPPH^-$): $p_r(x,t) = p_0 r\cos(\omega t + kx)$ et $p_r(x,t) = -\dfrac{p_0 r}{Z_a}\cos(\omega t + kx)$.

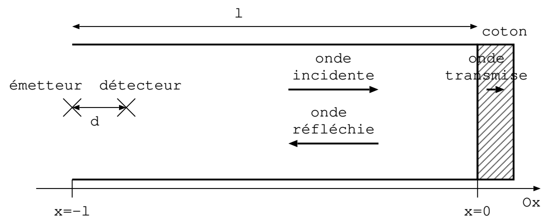
Pour l'onde transmise ($OPPH^+$) : $p_t(x,t) = p_0 t\cos(\omega t - kx)$ et $v_t(x,t) = +\dfrac{p_0 t\tau}{Z_c}\cos(\omega t - k'x)$.

2.b. On applique la continuité de la surpression en $x = 0$: $p_i(0,t) + p_r(0,t) = p_t(0,t)$ donne $1 + r = \tau$.

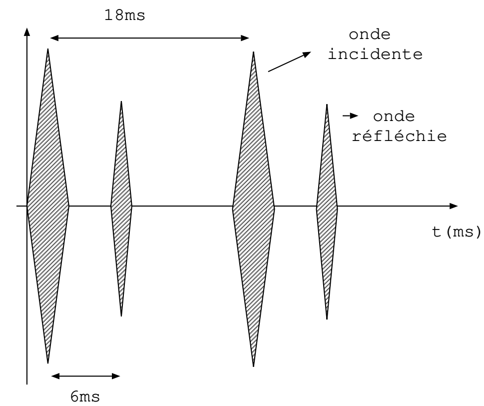
On applique la continuité de la vitesse particulaire en $x = 0$ (en effet on applique la continuité du débit volumique: section fois vitesse, et ici la section est constante donc c'est la vitesse qui est continue) : $v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$ donne $\dfrac{1}{Z_a} - \dfrac{r}{Z_a} = \dfrac{\tau}{Z_c}$.

On résout le système de deux équations à deux inconnues r et t, on obtient: $r = \dfrac{Z_c - Z_a}{Z_c + Z_a}$ et $\tau = \dfrac{2Z_c}{Z_c + Z_a}$.

3. La source émet une onde incidente qui se propage dans le tuyau, cette onde donne naissance en arrivant sur le coton au bout du tuyau à une onde transmise et à une onde réfléchie. La sonde détecte le passage de l'onde incidente et un peu plus tard dans le temps le passage de l'onde réfléchie.



Sur l'oscillogramme, on observe les impulsions de l'onde incidente reçue par le détecteur à intervalle de temps régulier soit 18 ms (ce sont les impulsions de grande amplitude). On observe également des impulsions reçues périodiquement par le récepteur mais de plus faible amplitude, ce sont les impulsions de l'onde réfléchie. A $t = 0$, l'onde incidente est reçue par le détecteur, elle se propage jusqu'au bout du tuyau, entre la sonde et le coton elle parcourt la distance $L - d$. Elle subit sur le coton une réflexion et l'onde réfléchie arrive au détecteur après avoir parcouru la distance $L-d$. Il y a donc un décalage en temps entre le passage de l'onde incidente et le passage de l'onde réfléchie devant la sonde de $\Delta t = \dfrac{2(L-d)}{c}$ qui est égal à $\Delta t = 6\ ms$. On en déduit la célérité des ondes $c = \dfrac{2(L-d)}{\Delta t} = 333\ m.s^{-1}$.



Sur l'oscillogramme, l'amplitude des ondes incidentes est deux fois plus grandes que celle des ondes réfléchies donc $r = \dfrac{Z_c - Z_a}{Z_c + Z_a} = 0,5$ (en effet $r = \dfrac{p_r(x=0,t)}{p_i(x=0,t)}$) soit $Z_c = 3Z_a$.

VIII. Correction: Deux cordes de masses différentes

1. On a $c_1 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_1}}$ et $c_2 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu_2}}$. Les ondes vont d'autant plus vite que la corde est tendue et peu dense.

On a $k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$ sur la corde 1 et $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$ sur la corde 2.

2. Les fonctions $y_i(x,t)$ et $y_r(x,t)$ vérifient l'équation de d'Alembert avec pour vitesse des ondes c_1 et $y_t(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert avec pour vitesse des ondes c_2.

3. Soit la portion de corde entre x et $x + dx$. On a $\tan\alpha(x,t) = \dfrac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{dx} = \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t) \approx \alpha(x,t)$ car les angles sont petits.

Notez pour la suite que $y(x < 0, t) = y_i(x,t) + y_r(x,t)$ et $y(x > 0, t) = y_t(x,t)$.

4. On a $y(x = 0^-, t) = y(x = 0^+, t)$ car la hauteur des cordes est la même juste à droite et juste à gauche du noeud soit $y_i(x=0,t) + y_r(x=0,t) = y_t(x=0,t)$ d'où en remplaçant par les expressions on a $1 + r = \tau$.

5. Le noeud subit les forces de tension des cordes 1 et 2 (on néglige son poids). Et comme la masse du noeud est nul, la somme des forces est nulle aussi. Donc les tension des cordes 1 et 2 à gauche et à droite du noeuds sont opposées et les angles $\alpha(x = 0^-, t)$ et $\alpha(x = 0^+, t)$ sont égaux soit $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-, t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(x = 0^+, t)$.

On a donc $\dfrac{\partial y_i}{\partial x}(x=0,t) + \dfrac{\partial y_r}{\partial x}(x=0,t) = \dfrac{\partial y_t}{\partial x}(x=0,t)$. En remplaçant par les expressions on a $k_1(1-r) = k_2\tau$ ou encore $\dfrac{1-r}{c_1} = \dfrac{\tau}{c_2}$ et $1 - r = \dfrac{\tau c_1}{c_2}$.

6. On résout le système: $1 + r = \tau$ et $1 - r = \dfrac{\tau c_1}{c_2}$. On trouve $\tau = \dfrac{2c_2}{c_1 + c_2}$ et $r = \dfrac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$.

Le coefficient τ est toujours positif donc les ondes transmise et incidente sont toujours en phase.

Le coefficient r est positif pour $c_2 > c_1$: les ondes réfléchie et incidente sont en phase et négatif pour $c_2 < c_1$: les ondes réfléchie et incidente sont en opposition de phase.