L'approximation acoustique à faire des développements limités à l'ordre 1 en perturbation sachant que v, p et ρ sont des infiniment petits d'ordre 1.

A1 – L'équation d'Euler est l'équation de Navier–Stokes dans laquelle on néglige la viscosité du fluide soit :

$$\mu\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{\text{ordre }2}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \cancel{\mu\vec{g}}$$ on néglige le poids

soit $$\underbrace{(\mu_0+\rho)\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{ordre }2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P_0+p)$$

d'où en projection sur (Ox) : $\boxed{\mu_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$ équation (E)

A2 – L'équation de conservation de la masse s'écrit : $\text{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$

soit $$\text{div}\left(\underbrace{(\mu_0+\rho)\vec{v}}_{\text{ordre }2}\right) + \frac{\partial(\mu_0+\rho)}{\partial t} = 0$$

d'où $\mu_0\,\text{div}\,\vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ avec $\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x}$

soit $\boxed{\mu_0\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ équation (M)

A3 – Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit : $\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big)_S = +\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial P}\Big)_S$

soit $$\chi_S = \frac{1}{\mu_0+\rho}\frac{\Delta\mu}{\Delta P} = \frac{1}{\mu_0+\rho}\frac{\mu-\mu_0}{P-P_0} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0+\rho}\cdot\frac{\rho}{p}}_{\text{ordre }2} = \frac{\rho}{\mu_0 p}$$

d'où $\boxed{p\,\mu_0\chi_S = \rho}$ équation (T)

A4 – On a $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \underset{\text{d'après (E)}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\mu_0\frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\frac{\partial v}{\partial x}\right) \underset{\text{d'après (M)}}{=} +\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \underset{\text{d'après (T)}}{=} \mu_0\chi_S\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

soit $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_0\chi_S\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$ c'est une équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_S}}$ pour vitesse de propagation

A 3 dimensions : $p = p(x,y,z,t)$ $\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ devient $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \Delta p$

d'où $\boxed{\Delta p - \mu_0\chi_S\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$

A5 – Pour un GP : $\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$ et $\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$ soit $c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}4\times 8{,}3\times 293}{29.10^{-3}}} = 340$ m

B1 - L'onde est progressive puisque les variables t et x sont dans le même terme appelé phase. Ici l'onde se propage selon $(+Ox)$.
L'onde est plane car à un instant donné les points qui ont la même surpression sont dans le plan x = constante, plan perpendiculaire à la direction de propagation.
L'onde est harmonique, la surpression est une fonction sinusoïdale de x et t.

B2 - On trouve la relation de dispersion en remplaçant p par $p(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$ dans l'équation de propagation soit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ donne } -k^2 p - \frac{1}{c^2}(-\omega^2 p) = 0$$

d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ soit $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$ relation de dispersion des ondes dont l'ép. de propagation est de type d'Alembert

On en déduit la vitesse de phase : $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c}$: indépendante de ω donc il n'y a pas dispersion

---

B3 - On peut utiliser l'équation (E) : $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

avec $p = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$, $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$, $\frac{\partial}{\partial x} = -jk$

d'où $\mu_0 j\omega \underline{v} = -(-jk p)$ soit $\underline{v}\,\mu_0 \omega = k p = \frac{\omega}{c} p$

ou encore $\boxed{p = \mu_0 c\, \underline{v}}$ on a donc bien une relation du type $p = Z\,\underline{v}$ avec $\boxed{Z = +\mu_0 c}$ désigne l'impédance acoustique

---

B4 - Pour un GP : $PV = nRT = m\frac{RT}{M}$ soit $\mu_0 = \frac{m}{V} = \frac{P_0 M}{RT_0}$ et $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$

donc $\boxed{Z = \frac{P_0 M}{RT_0}\sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = P_0\sqrt{\frac{\gamma M}{RT_0}}}$ AN : $Z = 10^5 \sqrt{\frac{1,4 \times 29\,10^{-3}}{8,3 \times 293}}$

$\underline{Z = 409 \text{ Pa m}^{-1}\text{s}}$

B5 - $[p\,v] = \left[\frac{F}{S} \times v\right] = \left[\frac{P}{S}\right]$ I est donc bien homogène à une puissance surfacique

une pression est une force par unité de surface

une puissance est une force fois une vitesse

B6 — $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{|I|}{I_0}\right)$: avec $I = \langle p\,v \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{Z}$

l'intensité est donc le carré de la surpression

et $10 \log\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = 20 \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$

Ainsi quand on calcule un gain en décibels à partir d'une amplitude on applique $20 \log\left(\frac{A_{sortie}}{A_{entrée}}\right)$ et quand on calcule le gain en décibels à partir de puissance (homogène au carré de l'amplitude) on applique $10 \log\left(\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right)$.

B7 — $I_M = \langle p.v \rangle = \langle \frac{p^2}{Z} \rangle$ avec $\underline{p} = p_0\, e^{j(\omega t - kx)}$

$$p = Re(\underline{p}) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

soit $I_M = \frac{p_0^2}{Z} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{p_0^2}{2Z}$ d'où $\boxed{p_0 = \sqrt{2 Z I_M}}$

et $p = Z\,v$ conduit à $\boxed{v_0 = \frac{p_0}{Z} = \sqrt{\frac{2 I_M}{Z}}}$

Un son très intense est de l'ordre de 100 dB

soit $I_{dB} = 100 = 10 \lg\left(\frac{I_M}{I_0}\right)$ donc $I_M = I_0\, 10^{10} = 10^{-2}\ W\,m^{-2}$

AN : $p_0 = \sqrt{2 \times 408 \times 10^{-2}} = 2{,}9$ Pa $\qquad v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-2}}{408}} = 7{,}0\ mm\,s^{-1}$

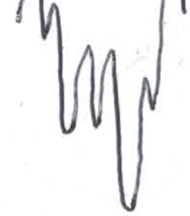
$p_0 \ll P_0 = 10^5$ Pa $\qquad v_0 \ll c$

L'approximation acoustique est bien vérifiée, $\frac{p}{P_0}$ et $\frac{v}{c}$ sont des infiniment petits.

C1 — Un instrument de musique émet un signal périodique dont le spectre est discret et comprend un fondamental et des harmoniques à des fréquences multiples de celle du fondamental.

Un bruit présente un spectre continu.

C2a



On lit : $8T = (19{,}5 - 1{,}5)$ ms

soit $T \simeq \frac{18}{8} = 2{,}25$ ms et $f = \frac{1}{T} \simeq 450$ Hz

Le spectre présente bien un fondamental à une fréquence voisine de 450 Hz

C 2 b- Les deux signaux de la figure 3 a ont la même période, on lit :

$8T \simeq 18$ ms. Pour différencier les spectres on va utiliser le nombre d'harmoniques. Plus un signal a une allure proche de celle d'une sinusoïde et moins il comprend d'harmoniques.

L'enregistrement (a) correspond à un signal assez ressemblant à une sinusoïde, son spectre est pauvre en harmoniques : c'est le spectre 2 (flûte)

L'enregistrement (b) au contraire a une forme très éloignée d'une sinusoïde donc son spectre a beaucoup d'harmoniques : c'est le spectre 1 (harmonium)

B 8- Un soliste produit un son de 65 dB soit $I_{dB} = 65\,dB = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$

donc $I_1 = I_0\, 10^{6,5} = 3{,}2.10^{-6}$ W.m^{-2}

En présence de plusieurs solistes, on somme les intensités (et non les intensités en dB) pour avoir l'intensité résultante soit $I_n = n\, I_1$ pour n solistes.

On cherche le nombre de solistes tels que $I_{dB} > 80$ dB soit $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) > 80$ dB

soit $I > I_0\, 10^{8} = 10^{-4}$ W m^{-2}

On veut donc $I_n = n\, I_1 = 10^{-4}$ soit $n = \frac{10^{-4}}{3{,}2.10^{-6}} = 31{,}2$

Il faut donc au moins 32 choristes pour couvrir le piano de 80 dB.