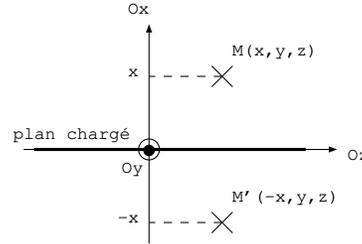


DS 6 de physique

Le sujet comporte trois problèmes à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages. Tout résultat doit être justifié par une loi ou un schéma ou une explication...

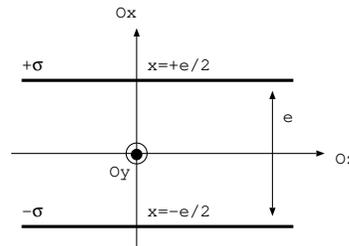
I. Condensateur plan

On se propose de calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ . Ce plan correspond au plan (Oyz) d'un système de coordonnées cartésiennes muni de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On se place tout d'abord dans le cas de l'électrostatique ($\sigma =$ constante).



1. Montrer, par des considérations de symétrie, que le champ électrique créé en M ne dépend que d'une coordonnée et n'est porté que par un des vecteurs de base et déterminer la relation entre les champs électriques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$, où M' est le symétrique de M par rapport au plan Oyz .
2. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ électrique est uniforme au dessus et en dessous du plan.
3. Dédire de l'application du théorème de Gauss sur une surface qu'on précisera clairement en faisant un schéma, l'expression du champ électrique en fonction de σ , ϵ_0 et d'un vecteur unitaire judicieusement choisi dans les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$. Une démonstration très précise est attendue.
4. Déterminer le potentiel électrique $V(M)$ en tout point de l'espace en fonction de σ , ϵ_0 et x (on prendra le potentiel nul en $x = 0$).
5. Tracer l'allure des courbes $E(x)$ et $V(x)$ en précisant les valeurs aux points remarquables.

On considère maintenant un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de e . Le plan supérieur est situé dans le plan $x = +e/2$ et le plan inférieur dans le plan $x = -e/2$. Le plan supérieur est chargé avec une densité surfacique $+\sigma$ positive et le plan inférieur est chargé avec une densité surfacique opposée $-\sigma$.



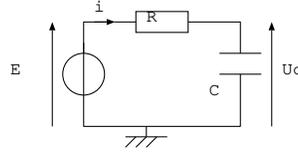
6. Déterminer le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace en fonction de σ , ϵ_0 et d'un vecteur unitaire qu'on précisera (on distinguera les trois zones délimitées par les deux plans). Porter sur un schéma le sens du champ électrique.
7. Exprimer la différence de potentiel $U = V(x = +e/2) - V(x = -e/2)$ entre les deux plans infinis en fonction de σ , e et ϵ_0 . Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de U et e .
8. Application numérique : les condensateurs des microphones électrostatiques pour la prise de son, sont soumis à des tensions de l'ordre de quelques dizaines de volts et les armatures sont séparées de quelques dizaines de micromètres. Donner l'ordre de grandeur du champ électrique régnant dans ces condensateurs. Quel problème pratique pose un champ électrique trop grand ?

Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques S . On supposera que les résultats trouvés pour le champ électrique et le potentiel ne diffèrent pas des résultats trouvés dans les questions précédentes, pourvu qu'on ne se place pas trop près des bords des armatures. L'armature supérieure porte alors la charge totale $+Q$ et l'armature inférieure la charge totale $-Q$.

9. Exprimer la différence de potentiel U entre les deux armatures en fonction de Q , ϵ_0 , e et S . Définir et exprimer la capacité C du condensateur formé en fonction de ϵ_0 , e et S . Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur utilisé dans un microphone électrostatique pour lequel on prendra : $S = 1,0 \text{ cm}^2$, $e = 10 \text{ } \mu\text{m}$ et $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$.

10. L'énergie électrique par unité de volume en M s'écrit $w_e(M) = \frac{\epsilon_0 E^2(M)}{2}$. Exprimer l'énergie électrique totale stockée entre les armatures du condensateur en fonction de C et \bar{U} .

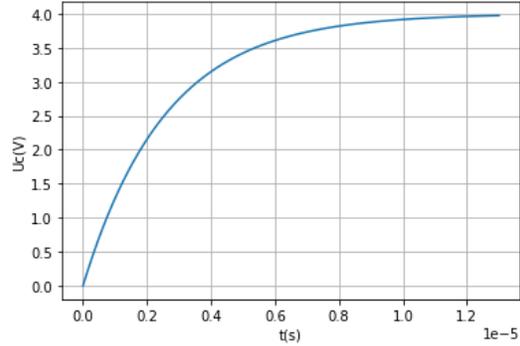
On souhaite mesurer expérimentalement la capacité C d'un tel condensateur. On propose pour cela de réaliser le montage suivant et on donne la courbe représentant $U_c(t)$, la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps. A l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé et on branche le générateur qui délivre la tension constante E .



11. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $U_c(t)$ et la mettre sous la forme $\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ (*)

12. Comment se nomme τ et quelle est sa signification physique?

13. Exprimer $U_c(t)$ et déduire de la courbe les valeurs numériques de τ et de E . En déduire une estimation de C pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



14. Pour résoudre l'équation différentielle (*) et tracer la courbe $U_c(t)$ on peut utiliser la méthode numérique d'Euler. On note *pas* le pas de temps. On cherche par approximations successives, les valeurs de $U_c(t)$ aux instants $t_0 = 0$, $t_1 = pas$, $t_2 = 2.pas, \dots$

14.a. Exprimer $U_c(t + pas)$ en fonction de $U_c(t)$, *pas* et $\frac{dU_c}{dt}(t)$ en déduire $U_c(t + pas)$ en fonction de $U_c(t)$, *pas*, τ et E .

14.b. Compléter le code suivant qui a permis de tracer la courbe ci-dessus:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
E,tau=.....,.....
t=[...]
Uc=[...]
pas=tau/100
N=500
for i in range(N):
    —t.append(.....)
    —Uc.append(.....)
plt.plot(.....,.....)
plt.xlabel('.....')
plt.ylabel('.....')
plt.grid()
plt.show()
```

II. Température interne du Soleil et héliosismologie

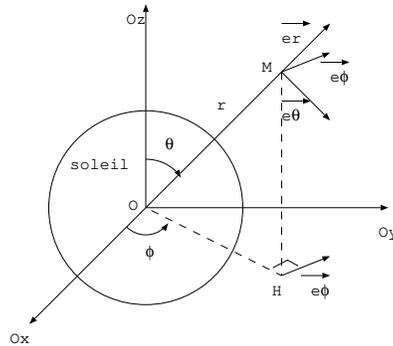
L'héliosismologie est la discipline qui étudie les vibrations globales du Soleil, en suivant notamment les variations de vitesse de la surface du Soleil par effet Doppler. Ces variations de vitesse présentent une forme de régularité, ce qu'on peut lier à l'existence de modes internes de vibration du Soleil. Ceux-ci, à leur tour, renseignent sur le profil de température et de pression internes du Soleil. Nous allons commencer par estimer l'ordre de grandeur de la température et la pression à l'intérieur du Soleil, si on le modélise par un gaz parfait d'atomes d'hydrogène.

Données: masse du soleil: $M_s = 1,99.10^{30} \text{ kg}$, rayon du soleil: $R_s = 6,96.10^5 \text{ km}$, constante de gravitation universelle: $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.kg^{-1}.s^{-2}$, constante des gaz parfaits: $R = 8,31 \text{ SI}$, masse molaire de l'hydrogène: $M_H = 1,0 \text{ g.mol}^{-1}$.

En coordonnées sphériques: $\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$.

1. Donner l'expression de la masse volumique du Soleil ρ si on la suppose essentiellement homogène, hypothèse simplificatrice que l'on continuera de faire dans toute cette partie.
2. Le soleil est constitué d'hydrogène assimilé à un gaz parfait. Donner la relation qui lie la pression P à la masse volumique ρ et à la température T dans le soleil.

3. M est repéré par ses coordonnées sphériques. Justifier par les propriétés de symétrie et d'invariance que le champ de gravitation peut s'écrire sous la forme $\vec{g}(M) = g(r)\vec{e}_r$.



4. On peut faire une analogie entre la loi de Coulomb d'interaction électrostatique entre charges ponctuelles et la loi de gravitation universelle énoncée par Newton pour des masses supposées ponctuelles. Rappeler ces deux lois, et dire en quoi une correspondance directe est possible. Énoncer alors le théorème de Gauss pour le champ électrique, puis en utilisant l'analogie précédente, énoncer ce théorème pour la gravitation.

5. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ gravitationnel à l'intérieur et à l'extérieur du Soleil si l'on considère qu'il est formé d'un gaz parfait d'hydrogène uniforme. On montrera notamment que le champ de gravitation à l'intérieur du soleil s'écrit: $\vec{g}(M) = -\mathcal{G} \frac{M_s}{R_s^3} r \vec{e}_r$.

6. En utilisant un raisonnement hydrostatique, déterminer l'expression de la pression en fonction de la distance au centre du Soleil $P(r)$. On pourra supposer que la pression à la surface du Soleil est négligeable, puisque c'est une interface essentiellement en contact avec le vide.

7. En déduire une expression de la température au centre du Soleil dans le cadre de ce modèle, et en calculer un ordre de grandeur. En réalité, le coeur du Soleil, de rayon $0,25R_s$ est beaucoup moins dense, et donc moins chaud que cette prévision.

8. Reprendre les résultats de la question 5 et exprimer le champ de gravitation créé par le soleil pour $r < R_s$ et $r > R_s$ en fonction de \mathcal{G} , R_s , M_s , OM et \vec{OM} .

Dans la suite, on cherche à tracer sous python le vecteur champ de gravitation créé par le soleil à l'intérieur et à l'extérieur du soleil.

Rappel:

`np.linspace(a,b,N)` : crée un tableau à une dimension (soit un vecteur) comportant N éléments équirépartis entre a , le premier élément et b , le dernier élément.

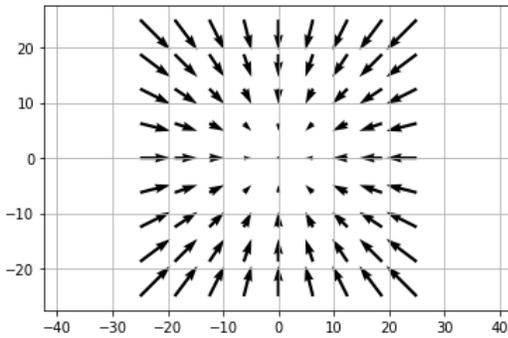
`plt.quiver(x1,x2,V1,V2)` : trace le vecteur $V_1 \vec{e}_x + V_2 \vec{e}_y$ d'origine le point de coordonnées (x_1, y_1)

9. On donne le code suivant:

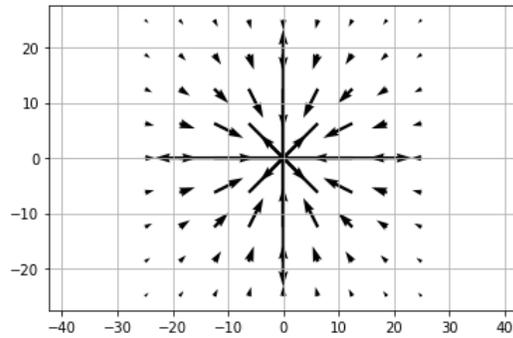
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a,G,Ms,Rs=5,1,1,5
N=9
x=np.linspace(-a*Rs,a*Rs,N)
y=np.linspace(-a*Rs,a*Rs,N)
def A1(x,y):
    —return -G*Ms/Rs**3*x
def A2(x,y):
    —return -G*Ms/Rs**3*y
xx,yy=np.meshgrid(x,y)
plt.quiver(xx,yy,A1(xx,yy),A2(xx,yy))
plt.axis('equal')
plt.grid()
plt.show()
```

Ce code a permis de tracer l'un des graphes suivants:

Graphe 1



Graphe 2



9.a. Lire les valeurs données à la masse et au rayon du soleil. Indiquer ce que représentent les fonctions $A1$ et $A2$ et dire si le code correspond au graphe 1 ou au graphe 2.

9.b. Ecrire les fonctions nommées $B1$ et $B2$ similaires à $A1$ et $A2$ correspondant à l'autre expression du champ de gravitation créé par le soleil.

9.c. On souhaite maintenant afficher la carte avec les vecteurs champ de gravitation en distinguant les points à l'intérieur et à l'extérieur du soleil, pour cela on complète le code précédent:

```
for i in range(N):
    —for j in range(N):
        ——r=(x[i]**2+y[j]**2)**0.5
        ——if r ..... Rs:
            ——plt.quiver(x[i],y[j],.....,.....)
        ——else:
            ——plt.quiver(x[i],y[j],.....,.....)
plt.show()
```

Compléter le code là où il y a des pointillés.

III. Les pancakes au sirop d'érable

Les canadiens sont friands de pancakes au sirop d'érable dont nous allons étudier ici deux étapes de la confection: La première partie de ce problème est consacrée au déversoir à pâte pour la réalisation des pancakes et la seconde partie à l'écoulement du sirop d'érable.

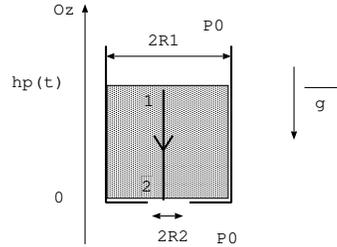
Partie A: déversoir à pâte

Le but du déversoir est de faire couler dans la poêle un volume de pâte à pancakes constant de manière automatisée. Trois options sont possibles pour sa réalisation : par électroaimant, par motorisation, par motorisation avec réservoir. La dernière solution sera retenue, elle permet d'ailleurs de prévoir un déversoir de sirop d'érable fonctionnant sur le même actionneur. On cherche à déterminer le temps de coulée de la pâte en fonction des différents paramètres du réservoir et du fluide afin de connaître la durée pendant laquelle l'actionneur doit laisser s'écouler la pâte.

Données: accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, dimensions du réservoir : $R_1 = 1,0 \text{ cm}$, $R_2 = 0,70 \text{ cm}$, hauteur initiale de pâte : $h_0 = 6,0 \text{ cm}$, masse volumique de la pâte: $\rho = 1,1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et viscosité dynamique : $\eta = 3 \text{ Pa.s}$.

Modèle parfait

On modélise le réservoir par un cylindre de rayon R_1 , rempli de pâte sur une hauteur h_0 à l'instant initial, baignant dans l'air atmosphérique à pression P_0 . En ouvrant le réservoir en son fond à l'instant $t = 0$, la pâte s'écoule à l'air libre à travers une section cylindrique de rayon R_2 , $h_p(t)$ désigne la hauteur de pâte encore présente dans le réservoir à l'instant t . On note ρ la masse volumique de la pâte et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.



Dans une première approche, on néglige toute dissipation d'énergie au sein de l'écoulement de pâte. On propose alors d'utiliser la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2 de la ligne de courant représentée sur la figure.

1. . Rappeler la relation de Bernoulli, ainsi que ses conditions d'application. On supposera ces conditions remplies dans le cadre de ce premier modèle.

2. L'écoulement étant supposé incompressible, établir la relation liant les vitesses $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de la pâte à l'instant t au niveau des points 1 et 2.

3. Que représente $-\frac{dh_p(t)}{dt}$? Déduire des questions précédentes une équation différentielle régissant l'évolution de $h_p(t)$. Résoudre cette équation différentielle par séparation des variables, et exprimer la durée totale τ_p de vidange du réservoir.

4. Calculer numériquement τ_p . On trouve un temps de vidange expérimental $\tau_{exp} = 1,5 \text{ s}$. Qu'en pensez-vous ?

Modèle visqueux

On propose un deuxième modèle tenant compte des effets visqueux. On note η la viscosité dynamique de la pâte. **Pour simplifier la modélisation, on assimile le réservoir à un cylindre de rayon R_1 , ce qui revient à négliger l'effet du rétrécissement de section de R_1 à R_2 .**

Pour un fluide réel, la relation de Bernoulli généralisée entre les points 1 et 2 de la ligne de courant s'écrit $\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + P_2 - (\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 + P_1) = -\Delta P_c$ avec $\Delta P_c = \frac{64 \rho v_m^2 h_p(t)}{\mathcal{R}e \cdot 2d}$ où ΔP_c s'appelle la perte de charge.

Dans cette expression, $v_m = -\frac{dh_p}{dt}$ représente la vitesse débitante (ou vitesse moyenne) de l'écoulement dans le réservoir, $d = 2R_1$ le diamètre du réservoir et $\mathcal{R}e$ le nombre de Reynolds. On a $h_p(t = 0) = h_0$.

5. Evaluer l'ordre de grandeur de v_m en utilisant le temps τ_{exp} donné précédemment. Rappeler la définition du nombre de Reynolds et en déduire son expression en fonction de ρ , v_m , η et d , puis estimer sa valeur

pour l'écoulement étudié. L'expression de ΔP_c proposée étant valable dans la limite $Re < 2.10^3$, vérifier la validité de cette formule.

6. Expliquer le contenu physique de la relation de Bernoulli généralisée.

7. Appliquer la relation de Bernoulli généralisée tenant compte de cette perte de charge entre les points 1 et 2 et obtenir une expression de $\frac{dh_p}{dt}$ en fonction de ρ , g , η et R_1 . On rappelle que l'on néglige l'effet du rétrécissement.

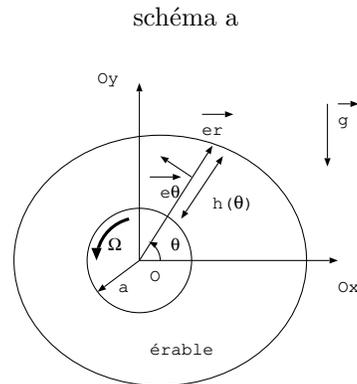
8. Déterminer la loi d'évolution $h_p(t)$. En déduire la durée totale de vidange du réservoir τ'_p . Calculer numériquement τ'_p et comparer à la valeur expérimentale τ_{exp} .

Partie B : le sirop d'érable

Le sirop d'érable, produit emblématique du Québec (province du Canada), est un concentré de sève d'érable recueillie en faisant des trous dans l'écorce de l'arbre au printemps. Quand on prend du sirop d'érable pour l'étaler sur un pancake, il vaut mieux tourner la cuillère ou le couteau pour en prendre le plus possible et éviter d'en faire tomber. Afin de modéliser la situation, on considère un cylindre de rayon a et de longueur L tournant autour d'un axe horizontal à la vitesse angulaire Ω et entouré d'une couche d'épaisseur $h(\theta, t)$ de sirop d'érable, assimilable à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , plongé dans le champ de pesanteur \vec{g} . On définit l'épaisseur moyenne du film liquide par $h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta$.

Données: accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, épaisseur moyenne du film : $h_0 = 0,5 \text{ mm}$, vitesse angulaire de rotation: $\Omega = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$, masse volumique du sirop d'érable: $\rho = 1,4.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et viscosité dynamique : $\eta = 0,20 \text{ Pa.s}$.

On cherche à étudier le régime stationnaire où l'épaisseur h du film de sirop ne dépend plus que de l'angle θ . On suppose l'épaisseur du film h faible devant le rayon a du cylindre et les déformations du film faibles devant h (dans un souci de lisibilité de la figure, les proportions ne sont pas respectées). Les effets de viscosité de l'air ambiant sont négligés et la pression est supposée uniforme au sein du film. L'étude étant menée en coordonnées cylindriques, on propose d'écrire le champ des vitesses dans le film sous la forme $\vec{v} = v(r, \theta, t)\vec{e}_\theta$.



On admet que l'application de l'équation de Navier-Stokes donne:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho g \cos \theta + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

9. En raisonnant sur les ordres de grandeur, exprimer le rapport du terme convectif sur le terme diffusif de l'équation de Navier-Stokes en fonction de ρ , η , h_0 et Ω . En déduire la condition sur Ω permettant de négliger le terme convectif par rapport au terme diffusif. Cette condition est-elle vérifiée ici ?

Sous cette condition, deux intégrations successives de cette relation permettent d'aboutir au champ des vitesses suivant: $v(r, \theta) = a\Omega + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [(r - a)^2 - 2(r - a)h]$.

10. Vérifier que $v(r, \theta)$ satisfait à la condition aux limites imposée en $r = a$. Reproduire le schéma a en y traçant le champ des vitesses en $\theta = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

11. Montrer que le débit volumique par unité de longueur défini par $Q(\theta) = \frac{D_v}{L} = a\Omega h - \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta}$.

12. Une étude montre que le fluide ne tombe pas de la cuillère pour un débit volumique par unité de longueur inférieur à $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \eta}{\rho g}}$. En déduire littéralement la masse maximale de sirop d'érable que l'on peut ainsi maintenir autour du cylindre, par unité de longueur, en fonction de g , η , ρ , a et Ω .

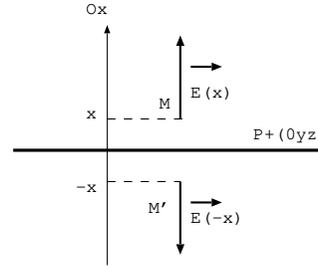
IV. Correction : condensateur plan

1. M appartient aux plans de symétrie $P^+(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $P^+(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le champ électrique en M est contenu dans ces plans, il est donc selon Ox .

Il y a invariance par translation selon Oy et Oz donc le champ électrique ne dépend ni de y , ni de z .

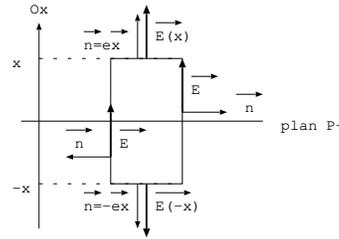
On a donc $\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$.

En deux points symétriques par rapport au plan $P^+(Oyz)$ les champs électriques sont symétriques par rapport à ce plan. D'après le schéma on voit que $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$.



2. L'équation de Maxwell Gauss s'écrit $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Pour $z > 0$ et pour $z < 0$, la densité volumique de charges est nulle donc $\text{div} \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} = 0$ ainsi le champ électrique est uniforme.

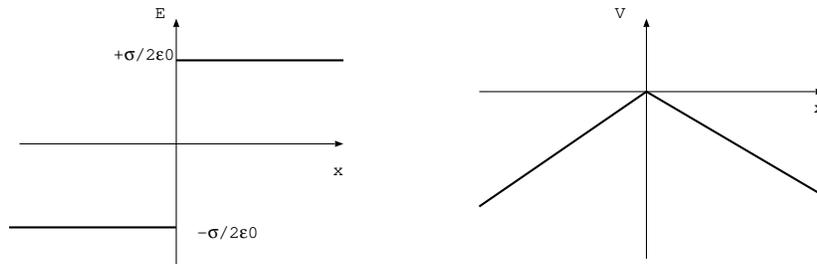
3. On choisit pour surface de Gauss un cylindre de section S , d'axe parallèle à Ox et compris entre les plans $-x < 0$ et $+x > 0$. Le flux du champ électrique à travers ce cylindre est $\phi = \iint \vec{E}(x) \cdot dS \vec{e}_x + \iint \vec{E}(-x) \cdot dS (-\vec{e}_x) = E(x)S - E(-x)S = 2E(x)S$ car $E(-x) = -E(x)$.



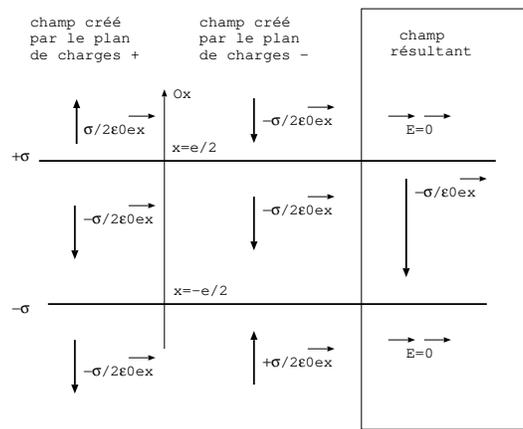
La charge intérieure contenue dans ce volume est $Q_{int} = \sigma S$ soit par application du théorème on a $2E(x)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ soit $\vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$ et par symétrie (la fonction $E(x)$ est impaire) $\vec{E}(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$.

4. On applique $\vec{E} = -\text{grad}V = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$ soit pour $x > 0$, on a $\frac{dV}{dx} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ et donc $V(x) = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} + 0$ (la constante d'intégration est nulle car le potentiel est pris nul en $z = 0$). De même pour $x < 0$, on a $\frac{dV}{dx} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ et donc $V(x) = +\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} + A$. Le potentiel est continu en $x = 0$ soit $V(x = 0^+) = V(x = 0^-)$ donc $A = 0$.

5. On obtient les courbe $E(x)$ et $V(x)$. On constate que le champ électrique est discontinu, la discontinuité mesure σ/ϵ_0 . Cette discontinuité est liée au modèle utilisé: les charges sont en réalité réparties dans des volumes et non sur une surface. La discontinuité disparaît si l'on tient compte de l'épaisseur du plan qui porte les charges.



6. On applique le théorème de superposition, le champ créé par les deux plaques est égal la somme des champs créés par chacune des plaques.



7. La différence de potentiel entre les plans est $U = V(x = e/2) - V(x = -e/2) = \int_{x=+e/2}^{x=-e/2} \vec{E}(M) d\vec{OM} = \int_{x=+e/2}^{x=-e/2} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x=+e/2}^{x=-e/2} dx = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$.

On en déduit le champ électrique en fonction de la tension appliquée: $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x = -\frac{U}{e} \vec{e}_x$.

8. AN: $E = \frac{10}{10 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ V}$, il y a un risque de claquage du condensateur. En effet l'air est isolant tant que le champ électrique ne dépasse pas une valeur limite, au delà de cette limite l'air devient conducteur.

9. Pour un condensateur on a la relation $Q = CU$ avec ici $Q = \sigma S$ et $U = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$. On a donc $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

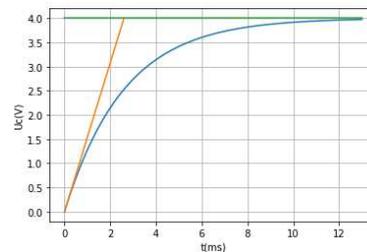
AN: $C = \frac{10^{-11} \cdot 10^{-4}}{10^{-5}} = 10^{-10} \text{ F}$.

10. L'énergie électrique présente entre les armatures du condensateur est $W_e = \iiint w_e(M) d\tau(M) = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{e^2} d\tau = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{e^2} S e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} U^2 = \frac{CU^2}{2}$: on retrouve l'expression de l'énergie électrique stockée entre les armatures d'un condensateur.

11. On applique une loi des mailles : $U_c + Ri = E$ avec la loi constitutive du condensateur $i = C \frac{dU_c}{dt}$ d'où l'équation différentielle $\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{RC} = \frac{E}{RC}$. Par identification $\tau = RC$.

12. τ se nomme le temps de relaxation du circuit, il représente la durée du régime transitoire, au bout d'un temps de l'ordre de 5τ , le régime permanent est atteint.

13. On lit $\tau = 2,5 \text{ ms}$ et $E = 4 \text{ V}$. On a donc $C = \frac{\tau}{R} = 2,5 \mu\text{s}$. L'énergie stockée dans le condensateur est $\frac{CE^2}{2} = 2.10^{-6} \text{ J}$.



14. 14.a. On utilise un DL à l'ordre 1 : $U_c(t + pas) = U_c(t) + pas \frac{dU_c}{dt}(t) = U_c + pas \cdot \frac{E - U_c(t)}{\tau}$ car d'après l'équation différentielle $\frac{dU_c}{dt} = \frac{E - U_c}{\tau}$.

14.b. Compléter le code suivant qui a permis de tracer la courbe ci-dessus:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
E,tau=4,2.5E-6
t=[0]
```

$U_c=[0]$: on remplit les listes t et U_c avec le terme correspondant aux conditions initiales soit $U_c(t = 0) = 0$.

```
pas=tau/100
```

```
N=500
```

```
for i in range(N):
```

```
——t.append(t[i]+pas) : la relation de récurrence pour compléter la liste t est  $t_{i+1} = t_i + pas$ 
```

```
——Uc.append(Uc[i]+pas*(E-Uc[i])/tau) : la relation de récurrence pour compléter la liste Uc est  $U_{c_{i+1}} = U_{c_i} + pas \frac{(E - U_{c_i})}{tau}$ 
```

```
plt.plot(t,Uc) : on affiche la courbe  $U_c(t)$ 
```

```
plt.xlabel('t(s)')
```

```
plt.ylabel('Uc(V)')
```

```
plt.grid()
```

```
plt.show()
```

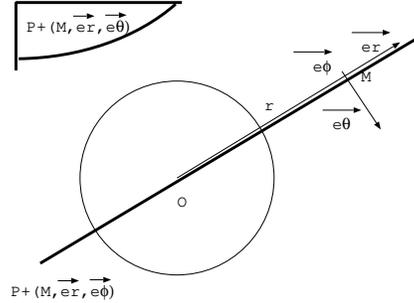
V. Correction : température du soleil

1. La masse volumique du Soleil est $\rho = \frac{M_s}{\frac{4\pi}{3}R_s^3}$.

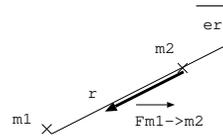
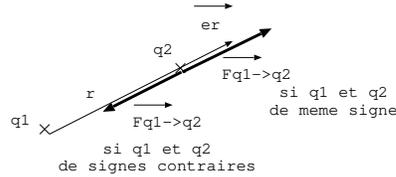
2. La loi des GP s'écrit $PV = nRT$ où n est le nombre de moles tel que $n = \frac{m}{M_H}$ (m est la masse et M la masse molaire). On a donc $P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{M_H V} = \frac{\rho RT}{M_H}$.

3. M appartient aux plans $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ donc $\vec{g}(M)$ appartient à ces deux plans donc le champ de gravitation est selon \vec{e}_r .

$\|\vec{g}(M)\| = g(r, \theta, \phi) = g(r)$ car il y a invariance par rotation autour du point O .



4.



La force électrique s'écrit $\vec{F}_{q1 \rightarrow q2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = q_2 \vec{E}_{q1}(M)$.

La force de gravitation s'écrit $\vec{F}_{m1 \rightarrow m2} = \frac{-\mathcal{G} m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = m_2 \vec{g}_{m1}(M)$.

La charge a donc pour analogue la masse.

Le champ électrique a pour analogue le champ de gravitation.

La constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ a pour analogue $-\mathcal{G}$.

Le théorème de Gauss pour le champ électrique s'énonce : le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égale à la charge intérieure contenue dans le volume délimité par la surface divisée par ϵ_0 .

Soit $\iint \vec{E}(M) \cdot dS(M) \vec{n}(M) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$.

Le théorème de Gauss pour le champ de gravitation s'énonce : le flux sortant du champ de gravitation à travers une surface fermée est égale à la masse intérieure contenue dans le volume délimité par la surface multipliée par $-4\pi\mathcal{G}$.

Soit $\iint \vec{g}(M) \cdot dS(M) \vec{n}(M) = -4\pi\mathcal{G} m_{int}$.

5. On choisit pour surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon $r = OM$. Le flux sortant du champ de gravitation à travers cette sphère s'écrit : Soit $\iint \vec{g}(M) \cdot dS(M) \vec{n}(M) = \iint g(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \iint g(r) dS = g(r) \iint dS = 4\pi r^2 g(r)$.

Cas où $r < R_s$: la masse intérieure à la surface de Gauss est la masse contenue dans la sphère de rayon r soit $m_{int} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$. D'après le théorème de Gauss on a $4\pi r^2 g(r) = -4\pi\mathcal{G} \rho \frac{4\pi r^3}{3}$ soit $\vec{g}(M) = -\mathcal{G} \rho \frac{4\pi r}{3} \vec{e}_r = -\mathcal{G} \frac{M_s}{R_s^3} r \vec{e}_r$.

Cas où $r > R_s$: la masse intérieure à la surface de Gauss est la masse contenue dans la sphère de rayon R_s , c'est la masse du soleil soit $m_{int} = M_s$. D'après le théorème de Gauss on a $4\pi r^2 g(r) = -4\pi\mathcal{G} M_s$ soit

$$\vec{g}(M) = -\mathcal{G} \frac{M_s}{r^2} \vec{e}_r.$$

6. On considère une particule fluide de masse $\rho d\tau$ dans le soleil. Elle est à l'équilibre sous l'action de son poids $+\rho d\tau g(r)\vec{e}_r$ et des forces de pression $-\text{grad}P d\tau$ soit $\rho g(r)\vec{e}_r - \text{grad}P = \vec{0}$.

En projection sur \vec{e}_θ et sur \vec{e}_ϕ on en déduit que la pression ne dépend pas de θ ni de ϕ .

En projection sur \vec{e}_r on a $\frac{dP}{dr} = \rho g(r)$ avec $g(r) = -\frac{4\pi}{3}\mathcal{G}\rho r$ d'où $\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\mathcal{G}\rho^2 r < 0$: la pression diminue quand on s'éloigne du centre du soleil, elle est maximale au centre du soleil.

On trouve $P(r)$ par intégration en supposant ρ constant soit: $P(r) = -\frac{2\pi}{3}\mathcal{G}\rho^2 r^2 + A$ avec $P(r = R_s) = 0 = -\frac{2\pi}{3}\mathcal{G}\rho^2 R_s^2 + A$ d'où $A = \frac{2\pi}{3}\mathcal{G}\rho^2 R_s^2$.

La pression est donc $P(r) = +\frac{2\pi}{3}\mathcal{G}\rho^2 (R_s^2 - r^2)$.

7. La température se déduit de la relation $T(r) = \frac{P(r)M_H}{\rho R}$ soit au centre du soleil $T(r = 0) = \frac{P(r = 0)M_H}{\rho R} = \frac{\mathcal{G}\rho^2 2\pi R_s^2 M_H}{3R}$.

8. Dans les expressions de la question 5, on remplace r par OM et \vec{e}_r par $\frac{\vec{OM}}{OM}$. On a donc $\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_s}{R_s^3}\vec{OM}$ pour $r < R_s$ et $\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_s}{OM^3}\vec{OM}$ pour $r > R_s$.

Avec une telle écriture, dans le code python, le vecteur \vec{OM} en coordonnées cartésiennes s'écrit $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

9.

9.a. On lit $M_s = 1 SI$ et $R_s = 1 SI$.

def A1(x,y):

—return -G*M_s/R_s**3*x : on reconnaît ici le terme $-\frac{\mathcal{G}M_s x}{R_s^3}$ qui représente la composante selon \vec{e}_x du champ de gravitation à l'intérieur du soleil

def A2(x,y):

—return -G*M_s/R_s**3*y : on reconnaît ici le terme $-\frac{\mathcal{G}M_s y}{R_s^3}$ qui représente la composante selon \vec{e}_y du champ de gravitation à l'intérieur du soleil

Le champ de gravitation à l'intérieur du soleil est proportionnel à OM donc plus on s'éloigne du soleil plus il est intense: c'est le graphe 1. Le champ de gravitation à l'extérieur de l'astre est en est $1/OM^2$ donc plus on s'éloigne de l'astre, plus il est faible : c'est le graphe 2.

9.b. Le champ de gravitation à l'extérieur du soleil s'écrit $\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_s}{OM^3}\vec{OM}$ soit en coordonnées cartésiennes $\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_s}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

def B1(x,y):

—r=(x**2+y**2)**0.5

—return -G*M_s/r**3*x

def B2(x,y):

—r=(x**2+y**2)**0.5

—return -G*M_s/r**3*y

9.c. On va distinguer deux cas : pour $r < R_s$ on applique les fonctions A1 et A2 et pour $r > R_s$ on applique les fonctions B1 et B2. On calcule la distance $r = OM$ en coordonnées cartésiennes c'est $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ d'où le code:

for i in range(N): i sert à balayer le vecteur des abscisses x

—for j in range(N): j sert à balayer le vecteur des ordonnées y

———r=(x[i]**2+y[j]**2)**0.5 : distance OM

```
——-if r < Rs: tant que l'on est à l'intérieur du soleil
——-plt.quiver(x[i],y[j],A1(x[i],y[j]),A2(x[i],y[j])) : champ de gravitation intérieur
——-else:
——-plt.quiver(x[i],y[j],B1(x[i],y[j]),B2(x[i],y[j])) : champ de gravitation extérieur
plt.show()
```

VI. Correction : pancakes

1. Le fluide est parfait et l'écoulement est incompressible et stationnaire (ici quasi stationnaire), il n'y a pas de pièces mobiles alors sur la ligne de courant entre 1 et 2, on peut écrire:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2 + \rho g z_2 \text{ avec } P_1 = P_2 = P_0, z_1 = h_p(t) \text{ et } z_2 = 0 \text{ soit } \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_p(t) = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

2. L'écoulement étant supposé incompressible, le débit volumique est conservé soit $\pi R_1^2 v_1(t) = \pi R_2^2 v_2(t)$ soit $v_2 = \frac{R_1^2}{R_2^2} v_1$.

3. On a la relation $v_1(t) = -dh_p/dt$ avec $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_p(t) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} v_1 \right)^2$ d'où $v_1(t) = \sqrt{\frac{2gh_p(t)}{\frac{R_1^4}{R_2^4} - 1}} = -\frac{dh_p}{dt}$.

On sépare les variables t et $h_p(t)$ soit: $\sqrt{\frac{2g}{\frac{R_1^4}{R_2^4} - 1}} dt = -\frac{dh_p}{h_p}$.

On intègre entre $t = 0$ où $h_p(0) = h_0$ et τ_p où $h_p(\tau_p) = 0$ soit $\sqrt{\frac{2g}{\frac{R_1^4}{R_2^4} - 1}} \int_0^{\tau_p} dt = -\int_{h_0}^0 \frac{dh_p}{h_p}$. On obtient

$$\text{donc } \sqrt{\frac{2g}{\frac{R_1^4}{R_2^4} - 1}} \tau_p = -2(\sqrt{0} - \sqrt{h_0}).$$

Le temps de vidange du réservoir est donc $\tau_p = \sqrt{\frac{2h_0}{g} \left(\frac{R_1^4}{R_2^4} - 1 \right)}$.

4. AN: $\tau_p = 0,2 \text{ s} \ll \tau_{exp} = 1,5 \text{ s}$: le temps de vidange a été nettement sous-estimé, en effet la pâte, en réalité est freinée par les effets de la viscosité que l'on a ici négligé. Il faut donc établir un second modèle qui tient compte des effets visqueux.

5. On a $v_m = \frac{h_0}{\tau_{exp}} = 4.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$.

Le nombre de Reynolds est le rapport des effets convectifs sur les effets diffusifs soit $Re = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}$.

En ordre de grandeur cela donne $Re = \frac{\rho v_m d}{\eta} = 0,3 < 2.10^3$. L'écoulement se fait à petit nombre de Reynolds, les effets convectifs sont négligeables par rapport aux effets diffusifs, le modèle proposé est validé.

6. $\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + P_2 - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 + P_1 \right)$ représente la variation d'énergie mécanique volumique d'une particule fluide entre les positions 1 et 2 le long de sa trajectoire. Lorsque le fluide est parfait, l'écoulement est stationnaire et incompressible, sans pièce mobile, cette variation est nulle, le système est conservatif. Lorsque le fluide est visqueux, l'énergie mécanique de la particule fluide n'est pas constante, elle diminue au cours de son mouvement.

7. Dans la relation de Bernoulli généralisée on a ici: $P_2 = P_1 = P_0, z_1 = h_p, z_2 = 0$ et $v_1 \pi R_1^2 = v_2 \pi R_2^2$, or on néglige le rétrécissement du déversoir en prenant $R_2 \approx R_1$, ce qui conduit à $v_2 = v_1$ d'où l'équation:

$$-\rho g h_p = -\frac{64}{Re} \frac{\rho v_m^2 h_p}{2d} = -\frac{64\eta}{\rho v_m 2R_1} \frac{\rho v_m^2 h_p}{4R_1} \text{ d'où } v_m = \frac{\rho g R_1^2}{8\eta} = -\frac{dh_p}{dt}.$$

8. On intègre par rapport au temps: $h_p(t) = -\frac{\rho g R_1^2}{8\eta} t + h_0$. Le temps de vidange τ'_p est tel que $h_p(\tau'_p) = 0$

soit $\tau'_p = \frac{8\eta h_0}{\rho g R_1^2}$. AN: $\tau'_p = 1,3 \text{ s}$: ce temps est toujours inférieur au temps expérimental mais il s'en rapproche. Le modèle du fluide visqueux est donc plus adapté pour décrire la pâte à pancake, l'écart entre τ'_p et τ_{exp} vient du fait que l'on a négligé le rétrécissement en bas du déversoir.

9. Le terme convectif est $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et le terme diffusif est $\eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. On en fait le rapport en ordre de grandeur,

on obtient $\frac{\rho v}{\eta} = \frac{\rho r^2}{\eta t}$. On doit exprimer r et t en fonction de Ω et h_0 soit $t = \frac{2\pi}{\Omega}$ (période du mouvement)

et $r = h_0$ d'où le rapport demandé $\frac{\rho h_0^2 \Omega}{2\pi \eta} \ll 1$ pour $\Omega \ll \frac{2\pi \eta}{\rho h_0^2}$.

AN: $\frac{2\pi\eta}{\rho h_0^2} = 4.10^4 \gg \Omega = 4\pi$: on peut donc ici négliger le terme convectif par rapport au terme diffusif.

$$v(r, \theta) = a\Omega + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [(r - a)^2 - 2(r - a)h].$$

10. Le fluide est visqueux, il adhère aux parois donc en $r = a$, la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi est nulle ou encore la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la paroi dans le référentiel du laboratoire soit ici $v(r = a) = a\Omega$, c'est effectivement ce que l'on obtient.

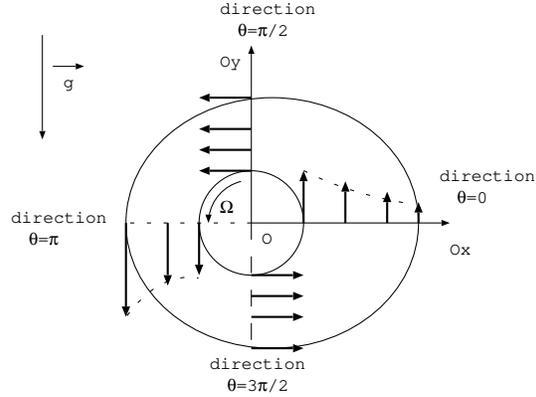
Pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$, la vitesse est uniforme et vaut $v = a\Omega$.

$$\text{On a } v(r, \theta = 0) = a\Omega + \frac{\rho g}{2\eta} [(r - a)^2 - 2(r - a)h]$$

soit $v(r = a + h, \theta = 0) = a\Omega - \frac{\rho g h^2}{2\eta} < a\Omega$: ici le poids entraîne le fluide vers le bas et s'oppose à son mouvement de rotation.

$$v(r, \theta = \pi) = a\Omega - \frac{\rho g}{2\eta} [(r - a)^2 - 2(r - a)h] \text{ soit}$$

$v(r = a + h, \theta = \pi) = a\Omega + \frac{\rho g h^2}{2\eta} > a\Omega$: ici le poids entraîne le fluide vers le bas et favorise son mouvement de rotation.



11. Le débit volumique s'écrit $D_v = \iint v(M) dS(M)$ où M est un point de la surface perpendiculaire à la vitesse donc M appartient à un rectangle de hauteur L selon Oz et compris entre $r = a$ et $r = a + h$.

M est repéré par r et z soit $dS = dr dz$ d'où $D_v = \int_0^L dz \int_a^{a+h} (a\Omega + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [(r - a)^2 - 2(r - a)h]) dr = L[a\Omega r + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} [\frac{(r - a)^3}{3} - 2\frac{(r - a)^2}{2} h]]_a^{a+h} = L(a\Omega h + \frac{\rho g \cos \theta}{2\eta} (\frac{h^3}{3} - h^3)) = L(a\Omega h - \frac{\rho g h^3 \cos \theta}{3\eta})$ d'où le débit volumique par unité de longueur demandé dans l'énoncé.

12. La masse présente autour de la cuillère se déduit du débit massique par $D_m T$ où $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ est la période de rotation de la cuillère, on a donc $m = D_m T = \rho D_v T$ et la masse maximale est $m_{max} = \rho Q_{max} L T = \frac{4\pi}{3\Omega} \sqrt{\frac{(a\Omega)^3 \rho \eta}{g}}$.