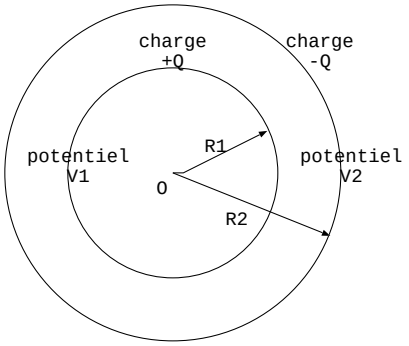
DS 7 de physique

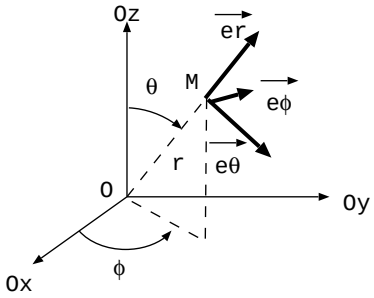
Le sujet comporte 4 problèmes indépendants, à traiter dans l'ordre de votre choix.

Tout calcul doit être justifié par une loi, son nom, ses hypothèses d'application...

I. **Condensateur sphérique**

On considère deux armatures sphériques de même centre O et de rayons respectifs R_1 et R_2 portant les charges $+Q > 0$ et $-Q$ réparties *uniformément en surface*. L'armature de rayon R_1 a pour potentiel V_1 et l'armature de rayon $R_2 > R_1$ a pour potentiel V_2. Soit un point M repéré par ses coordonnées sphériques.





1. Montrer que le champ électrique en M est de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.

2. Exprimer à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrique pour $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$ Tracer la courbe $E(r)$ et commenter cette courbe.

3. Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q, ϵ_0, R_1 et R_2.

4. Ce système constitue un condensateur sphérique. Rappeler la relation entre sa capacité C, la charge $+Q$ et la tension à ses bornes $U = V_1 - V_2$. Déduire des questions précédentes l'expression de la capacité de ce condensateur. Calculer la capacité du condensateur formé par la surface de la Terre (sphérique de rayon $R = 6400\ km$) et le bas de l'ionosphère situé à l'altitude $h = 50\ km$. Donnée: $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$.

5. En tout point M où règne un champ électrique, il existe une énergie électrique dont l'expression par **unité de volume** est donnée par : $u_e(M) = \dfrac{\epsilon_0 E^2(M)}{2}$ (u_e s'exprimer en $J.m^{-3}$). Exprimer l'énergie électrique totale U_e entre les cylindre de rayons R_1 et R_2.

Rappeler l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur en fonction de la charge Q des armatures et de sa capacité C. En déduire l'expression de la capacité du condensateur sphérique. Vérifier la cohérence avec le résultat précédent.

II. **Le gecko : interactions entre molécules polaires**

Données:

Permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$

Constante de Boltzmann $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

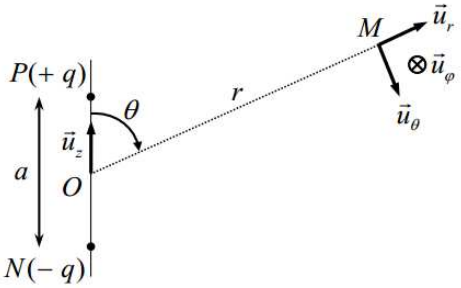
Intensité du champ de pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$

Définition du Debye 1 $D = 3,33.10^{-30}\ C.m$

$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \dfrac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \phi}\overrightarrow{U_\phi}$ en coordonnées sphériques

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\overrightarrow{p_1} = p_1\overrightarrow{U_z}$. Le dipôle, centré en un point O, est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$(avec $q > 0$), situées sur l'axe (Oz) aux points respectifs P et N distants de $a = PN$. On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans le repère $(O, \overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\phi})$.

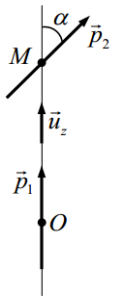


1. Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p_1}$ de la molécule polaire.

2. Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1, ϵ_0 et des coordonnées sphériques du point M.

3. En déduire que le champ électrostatique $\overrightarrow{E_1}(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques $\overrightarrow{E_1}(M) = \dfrac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\overrightarrow{U_r} + \sin\theta\overrightarrow{U_\theta})$.

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent $\overrightarrow{p_2}$, est située au point M sur l'axe Oz tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O. À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe. Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p_2}\Lambda\overrightarrow{E_1}(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules $E_{12} = -\overrightarrow{p_2}.\overrightarrow{E_1}(M)$.



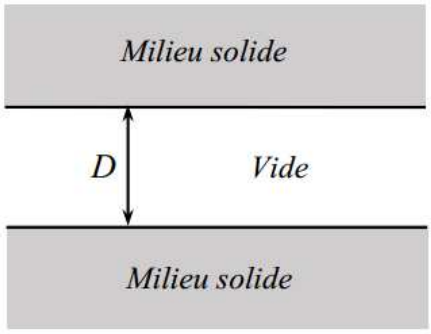
4. Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable. Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1\ D$.

5. Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0,5\ nm$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de k_BT où kB est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293\ K$. Conclure.

6. Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $< E_{12} >= \dfrac{-C_k}{r^6}$ où $C_k = \dfrac{1}{k_BT}(\dfrac{p^2}{2\pi\epsilon_0})^2$.

Donner un ordre de grandeur de C_k à la température ambiante $T = 293\ K$. Vérifier que la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$ qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{\text{grad}} < E_{12} >$.

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide, on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit $f(D) = \dfrac{A}{6\pi D^3}$. La constante A, appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.



7. Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.

8. Un gecko de masse $m = 50\ g$ est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0,2\ \mu m$ de côté située à une distance $D = 1\ nm$ du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19}\ J$ et on négligera tout effet de bord.

III. **Simulation numérique**

Annexe pour comprendre la syntaxe:

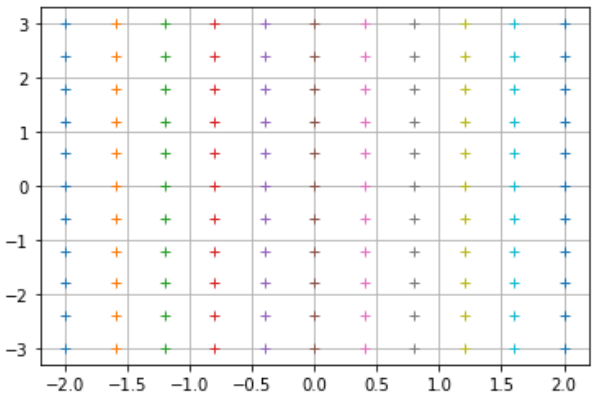
xx=np.linspace(-2,2,11) : crée un tableau 1D avec 11 éléments équirépartis entre -2 et $+2$

yy=np.linspace(-3,3,11) : crée un tableau 1D avec 11 éléments équirépartis entre -3 et $+3$

x,y=np.meshgrid(xx,yy) : crée un maillage 2D avec le tableau xx en abscisse et le tableau yy en ordonnées, soit un maillage avec des points dont l'abscisse est dans le tableau xx et dont l'ordonnée est dans le tableau yy

plt.plot(x,y,'+')

plt.show()



Soit deux charges q_1 et q_2 placées respectivement aux points $M_1(x_1, 0)$ et $M_2(x_2, 0)$. On donne le code suivant:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
1 e,epsilon0,K=1E-8,8.85E-12,1/(4*np.pi*epsilon0)
2 q1,q2=n*e,-e : n est un entier positif
3 x1,x2=....,....
4 x=np.linspace(....,.....,1000)
5 y=np.linspace(-.....,.....,1000)
6 X,Y=np.meshgrid(x,y)
7 A1=q1*K/((X-x1)**2+Y**2)**0.5
8 A2=q2*K/((X-x2)**2+Y**2)**0.5
9 A=A1+A2
10 plt.plot(x1,0,'o')
11 plt.plot(x2,0,'o')
12 plt.contour(X,Y,A,[40,60,80]) : permet de tracer les deux courbes correspondant à A = 40 et A = 60 et A = 80
13 plt.grid()
14 plt.show()
```

Le code précédent donne le graphe que vous trouverez en fin de sujet dans l'annexe 1 (les axes Ox et Oy sont gradués en mètre).

1. Que représentent $A1$, $A2$ et A? Compléter les lignes 4 et 5. Quel nom portent les 3 courbes tracées. Compléter la ligne 3 en justifiant votre réponse.

2. Déduire d'un calcul en vous appuyant sur l'une des courbes, la valeur numérique de n (ligne 2).

3. Tracer sur la courbe, l'allure du champ électrique aux deux points d'ordonnée $y = 0$ sur la courbe correspondant à $A = 60$ et aux deux points d'abscisse $x = 2$ sur la courbe sur la courbe $A = 80$. Evaluer la norme du champ électrique aux deux points d'ordonnée $y = 0$ sur la courbe correspondant à $A = 60$.

IV. **Télémétrie par ultrasons**

Le but de ce problème est d'étudier quelques caractéristiques d'un robot autonome. Pour se déplacer, le robot doit à tout instant mesurer la position des obstacles pour prendre la décision adéquate pour son déplacement futur. La mesure de la position des obstacles se fait par télémétrie dont le principe est le suivant: le robot émet une onde dans le domaine des ultrasons, cette onde est réfléchie sur l'obstacle et le robot reçoit l'onde réfléchie. La mesure du temps de propagation de l'onde entre l'émission et la réception permet de mesurer la distance entre le robot et l'obstacle.

Le problème est composé de deux parties: la première partie étudie la célérité des ultrasons et la deuxième partie étudie la réflexion des ultrasons sur des obstacles de différentes matières, immobiles ou mobiles.

Partie I: célérité des ondes

On étudie la propagation d'une onde ultrasonore produite dans l'air.

L'air est assimilé à un gaz parfait, initialement au repos de vitesse $\overrightarrow{v_0} = \vec{0}$, et qui en l'absence de toute perturbation possède une masse volumique μ_0, une pression P_0 et à une température T_0.

On suppose que la lame de quartz, positionnée à l'abscisse $x = 0$, transmet ses vibrations aux couches d'air environnantes et crée ainsi une onde ultrasonore sinusoïdale de fréquence f_0 se propageant suivant $(O, \overrightarrow{e_x})$ à la célérité c.

Le passage de l'onde perturbe l'équilibre.

En un point M de l'air d'abscisse x, à l'instant t, on note ainsi :

- *$p\,(x,t)$ la pression avec :*
$$p\,(x,t) = P_0 + p_1(x,t),$$
- *$\mu\,(x,t)$ la masse volumique avec :*
$$\mu\,(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t),$$
- *$\vec{v}\,(x,t) = v\,(x,t)\,\overrightarrow{e_x}$ le champ des vitesses avec :*
$$\vec{v}\,(x,t) = \overrightarrow{v_0} + v_1\,(x,t)\,\overrightarrow{e_x} \quad \text{où } v_1(x,t) \text{ est petit devant } c.$$

L'écoulement du fluide est considéré parfait et on néglige l'action de la pesanteur.

On donne la constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\ J.mol^{-1}.K^{-1}$.

Dans toute la suite, on se place dans l'approximation acoustique. Cela signifie que :

- *on considère des ondes de faible amplitude, pour lesquelles la surpression p_1 est très petite par rapport à la pression P_0 de l'air au repos : $|p_1| \ll P_0$;*
- *on mène les calculs au premier ordre.*

B1. L'air étant assimilé à un gaz parfait de masse molaire M_a, à la température T_0 supposée (dans un premier temps) constante, retrouver l'expression de la pression p de l'air en fonction de μ, M_a, T_0 et R. En déduire que l'approximation acoustique se traduit aussi par la relation $\mu_1 \ll \mu_0$.

Bilan de masse

On considère un volume élémentaire d'air $d\tau$, fixe dans le référentiel du laboratoire, contenu dans un cylindre de section S constante, d'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$ et compris entre les surfaces situées en x et en $x + dx$. Ce système est ouvert.

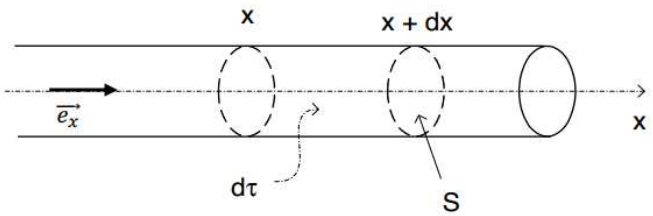


Figure 1 – Volume élémentaire d'air

B2. Donner l'expression de la masse $dm\,(t)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant t. De même pour la masse $dm\,(t + dt)$ présente dans le volume $d\tau$ à l'instant $t + dt$.

B3. Exprimer la masse δm_e entrant dans $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en x. Même question pour la masse δm_s sortant de $d\tau$ pendant la durée dt par la surface située en $x + dx$.

B4. Démontrer l'équation de conservation de la masse et la simplifier dans le cadre de l'approximation acoustique. On en déduit l'équation notée (R1).

B5. Ecrire l'équation d'Euler en précisant le sens de chaque terme et la simplifier dans le cadre de l'approximation acoustique pour obtenir l'équation notée (R2).

Évolution isentropique

Historiquement, Isaac Newton a supposé que les particules d'air subissent une transformation isotherme lors du passage d'une onde sonore. Cette hypothèse s'est avérée en désaccord avec les valeurs expérimentales de la célérité des ondes sonores. Ce fut Pierre Simon de Laplace qui montra que l'hypothèse d'une transformation isentropique est plus adéquate.

B6. On considère que, pour des ondes ultrasonores se propageant dans des fluides, l'hypothèse adiabatique est adéquate. Justifier succinctement et sans calculs, la raison de cette hypothèse.

Les particules d'air subissant une transformation isentropique lors du passage de l'onde ultrasonore, on définit alors l'expression du coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s.$$

B7. Établir, dans le cas de l'approximation acoustique, la relation liant μ_1 à μ_0, p_1 et χ_S. Cette relation constitue la relation **(R3)**.

Équation de propagation

B8. En utilisant les relations **(R1)**, **(R2)** et **(R3)**, montrer que la surpression p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à une dimension :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0.$$

On donnera l'expression de la célérité c de l'onde ultrasonore en fonction de μ_0 et χ_S.

B9. L'air étant assimilé à un gaz parfait de coefficient γ (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant), exprimer χ_S en fonction de γ et P_0 et en déduire que l'expression de la célérité c est :

$$c(T_0) = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}.$$

On notera par la suite c_0, la valeur de $c(T_{273})$ pour une température $T_{273} = 273\ K$.

Précision des mesures par télémétrie par ultrasons

On suppose, dans cette partie, que l'onde est bien réfléchie sur un obstacle. La mesure du temps de propagation de l'onde, connaissant sa célérité, permet de déterminer la distance parcourue par l'onde lors d'un aller-retour entre le robot et l'obstacle.

Sur un document technique concernant la télémétrie par ultrasons dans le cas d'un robot autonome, on trouve le graphe suivant :

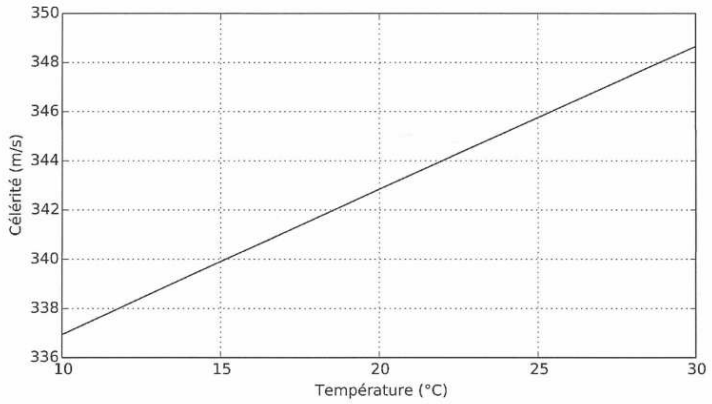


Figure 2 – Célérité des ultrasons en fonction la température

B10. Sur l'intervalle envisagé de température (voir figure 2) l'évolution de la célérité des ultrasons est fonction de la température θ mesurée en degré Celsius suivant la relation : $c(\theta) = a.\theta + b$. Déterminer graphiquement les valeurs de a et de b.

B11. Sur l'intervalle envisagé de température de la figure 2, linéariser la relation obtenue à la question **B9**. Déterminer les expressions de a et de b en fonction de c_0 et $T_{273} = 273\ K$. Déduire de b les valeurs numériques de c_0 et γ, sachant que dans le cas de l'air, $M_a = 29{,}0\ g.mol^{-1}$. Rappel: $(1+x)^n = 1 + n\ x$ pour x petit

Le robot n'est pas équipé d'un capteur de température, les distances sont donc calculées avec une célérité $c(\theta_{ref})$ correspondant à une température de référence θ_{ref}. Sur la figure 3, on trace l'écart entre la distance réelle d_r parcourue par l'onde lors d'un aller-retour et la distance mesurée d_m par le robot.

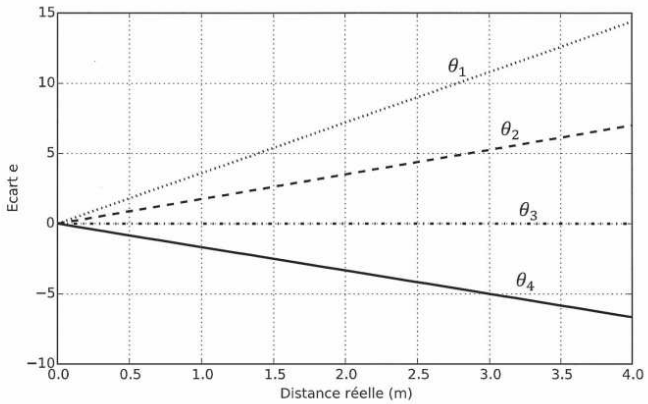


Figure 3 – Écart systématique e entre la distance réelle d_r parcourue par l'onde lors d'un aller-retour et la distance mesurée d_m par le robot pour différentes températures

En python:

```
3 def c(temp):
4 ——return 330.938*(1+temp/273)**0.5
5 Temp=[0,10,20,30]
6 n=len(Temp)
7 d=np.linspace(0,4,41)
8 N=len(d)
9 e=[ ]
11 for i in range(n):
12 ——e.append([ ])
13 ——for j in range (N):
14 ————e[i].append(d[j]*(c(20)/c(Temp[i])-1)*100)
15 ——plt.plot(d,e[i])
```

B12. Justifier l'expression mathématique (lignes 13 et 14) du programme qui calcule la valeur de l'écart e. Quelle est la valeur de la température de référence θ_{ref} ?

B13. D'après le programme, quelle est l'unité de l'écart e qui devrait être précisée sur la figure 3 ? Quelles sont les valeurs numériques de θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 ? Pourquoi e est-il négatif pour θ_4 ?

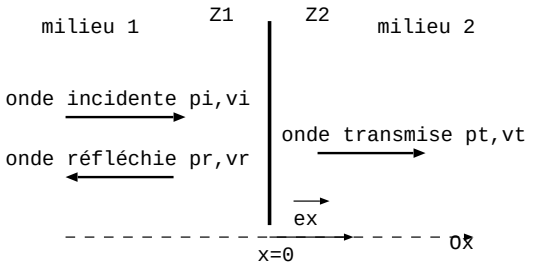
B14. Que vaut l'écart relatif pour une distance réelle robot-obstacle de $1{,}5\ m$ et une température $\theta = 30\ °C$? Est-il pertinent d'intégrer un capteur de température au robot pour estimer les perturbations dues aux variations de température pouvant exister dans le domaine de détection ?

Dans toute la suite du problème, on prendra pour valeur de la célérité des ondes ultrasonores $c = 343\ m.s^{-1}$ pour une température de l'air de 20°C.

Partie II: réflexion de l'onde ultrasonore

On étudie la réflexion et la transmission d'une onde ultrasonore sur une interface plane séparant l'air (milieu 1) d'un milieu solide (milieu 2), les deux milieux sont supposés s'étendre à l'infini.

On considère que l'interface plane est de masse négligeable, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation et au repos dans le référentiel d'étude en l'absence d'onde acoustique. On place l'origine du repère à l'interface en $x = 0$.



On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe Ox à la célérité c. On adopte la notation réelle pour les surpressions instantanées $p_i(x,t)$, $p_r(x,t)$ et $p_t(x,t)$ et pour les vitesses instantanées $v_i(x,t)$, $v_r(x,t)$ et $v_t(x,t)$. De plus, on introduit l'impédance acoustique Z_1 du milieu 1 et Z_2 du milieu 2, ces impédances Z_1 et Z_2 sont des réels **positifs**.

On a: $p_i(x,t) = p_{i0}\cos(\omega t - k_i x)$, $p_r(x,t) = p_{r0}\cos(\omega t + k_r x)$ et $p_t(x,t) = p_{t0}\cos(\omega t - k_t x)$

1. Exprimer $v_i(x,t)$, $v_r(x,t)$ et $v_t(x,t)$.

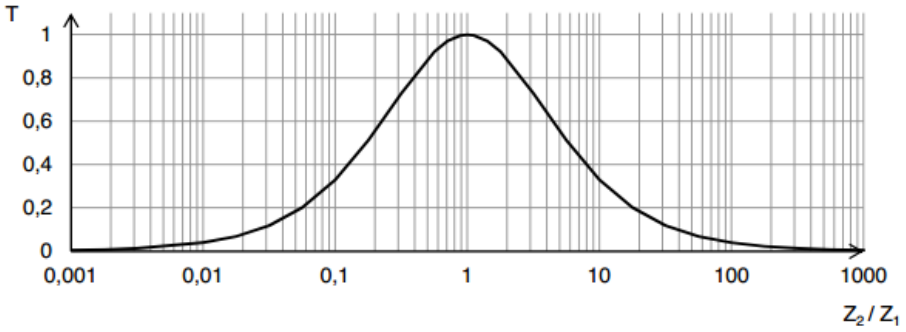
2. Ecrire les équations de continuité et montrer que les expressions de p_{r0} et p_{t0} en fonction de p_{i0} et des impédances Z_1 et Z_2 sont:

$p_{t0} = \dfrac{2Z_2}{Z_1+Z_2}p_{i0}$ et donc $p_{r0} = p_{t0} - p_{i0} = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2+Z_1}p_{i0}$

3. On définit le coefficient de réflexion en intensité acoustique par $R = \dfrac{|I_r(x=0)|}{I_0(x=0)}$ et le coefficient de transmission en intensité par $T = \dfrac{I_t(x=0)}{I_i(x=0)}$. Exprimer ces coefficients en fonction de Z_1 et Z_2.

4. On admet (on ne demande pas de le démontrer) que $R + T = 1$. Que traduit cette relation?

5. On donne le tracé du coefficient de transmission en intensité entre deux milieux en fonction du rapport de leur impédance acoustique $\dfrac{Z_2}{Z_1}$.



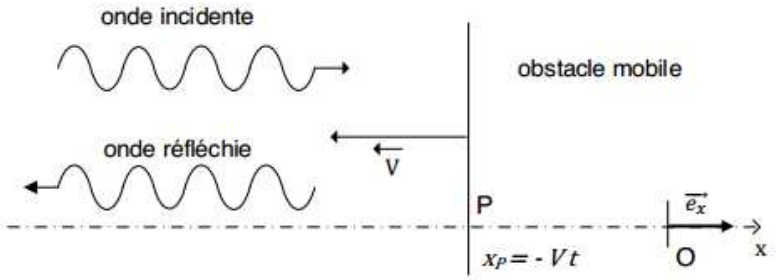
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de l'impédance acoustique de quelques milieux présents dans une maison.

Milieu	*Impédance acoustique Z* $(kg.m^{-2}.s^{-1})$
air	$4{,}2.10^2$
béton	$8{,}8.10^6$
bois dur	$2{,}8.10^6$
verre	$1{,}4.10^7$
polystyrène expansé	$6{,}0.10^3$
milieu biologique	$1{,}5.10^6$

En utilisant la courbe et le tableau, et en expliquant votre raisonnement, déterminer le milieu que le robot autonome détectera le moins. Pour ce milieu, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde est-elle bien réfléchie par les matériaux usuels (bois, verre, béton et être humain) rencontrés dans une maison?

Le robot doit aussi être capable de détecter des obstacles mobiles : enfant ou animal domestique se déplaçant. On étudie donc, dans cette partie, la réflexion d'une onde ultrasonore sur un obstacle (ou paroi) assimilé à une interface plane, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation. L'obstacle se déplace en direction de l'émetteur à vitesse constante $\overrightarrow{v} = -v\overrightarrow{e_x}$ avec $v > 0$.

On place l'origine du repère à la position initiale de l'obstacle, la position de ce dernier est donc : $x_P(t) = -vt$. On admet, dans cette partie, qu'il n'y a pas d'onde transmise. On néglige l'effet de l'écoulement de l'air engendré par le déplacement de la paroi, c'est-à- dire que l'on considère que les ondes incidentes et réfléchies se propagent comme si l'air était au repos.



On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe Ox à la célérité c. On adopte la notation réelle pour les surpressions instantanées et pour les vitesses instantanées.

On a donc pour l'onde incidente :

$p_i(x,t) = p_{i0}\cos(\omega_i t - k_i x)$ et $v_i(x,t) = v_{i0}\cos(\omega_i t - k_i x)$

On a donc pour l'onde incidente :

$p_r(x,t) = p_{r0}\cos(\omega_r t + k_r x)$ et $v_r(x,t) = v_{r0}\cos(\omega_r t + k_r x)$

6. Donner sans la démonter l' équation vérifiée par $p_i(x,t)$. En déduire la relation entre k_i et ω_i. Donner sans la démonter l' équation vérifiée par $p_r(x,t)$. En déduire la relation entre k_r et ω_r.

7. En considérant qu'au voisinage de l'interface la vitesse de la particule de fluide suivant l'axe Ox est nulle dans le référentiel du laboratoire, déterminer la relation entre ω_i, ω_r, k_i, k_r et v.

8. En déduire que la pulsation ω_r de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation ω_i sur un obstacle mobile à la vitesse v est : $\omega_r = \omega_i \dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$.

9. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de $v = 3,6\ km.h^{-1}$ vers ce dernier, justifier la relation : $\omega_r = \omega_i(1 + \dfrac{2v}{c})$. Rappel: $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

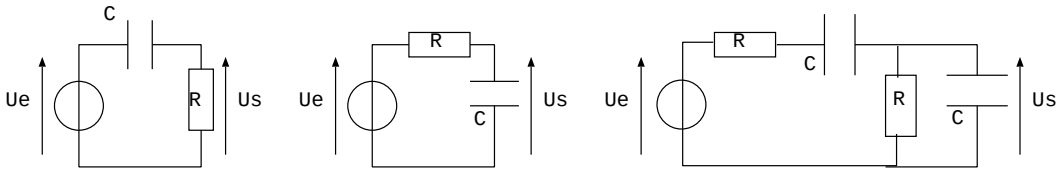
Pour prendre la décision adéquate : rebrousser immédiatement son chemin ou continuer encore son trajet, le robot doit déterminer la vitesse v de l'obstacle mobile. Pour cela on va effectuer une détection synchrone, c'est-à-dire qui exploite un décalage de fréquence. Dans un premier temps on multiplie la tension $U_i(t) = U_0\cos(\omega_i t)$ proportionnelle à l'onde émise par la tension $U_r(t) = U_1\cos(\omega_r t)$ proportionnelle à l'onde reçue. Puis on filtre le signal $U_e(t)$ ainsi obtenu.

Formulaire mathématique : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

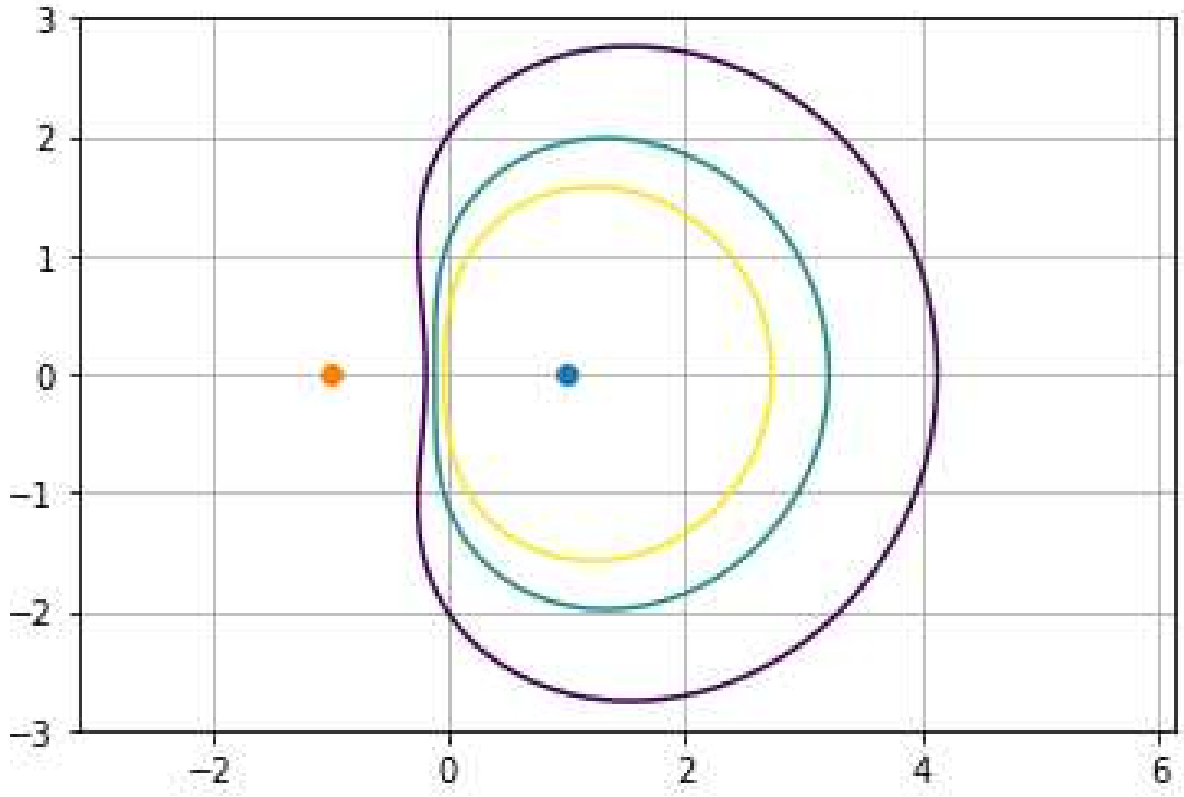
10. On a donc $U_e(t) = kU_i(t)U_r(t)$ où k est une constante positive. Exprimer $U_e(t)$ en fonction d'une somme de composantes sinusoidales et en déduire le spectre de U_e.

11. Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse $v = 3,6\ km.h^{-1}$ avec $c = 343\ m.s^{-1}$ et $f_i = 40\ kHz$, on désire ne conserver que la composante $\omega_r - \omega_i$ pour accéder à la valeur de v. Justifier ce choix. En déduire la nature du filtre nécessaire. Dans quel domaine de valeurs numériques doit se situer la pulsation de coupure ?

On cherche une réalisation simple de ce filtre, pour cela on étudie les 3 quadripôles suivants:



12. Analyser le comportement à basses et hautes fréquences des 3 quadripôles. Lequel de ces quadripôles réalise la fonction de filtrage désirée ?

NOM:

Annexe 1