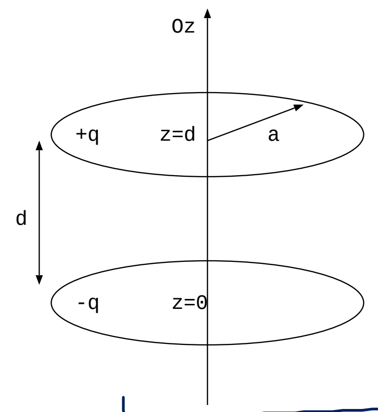
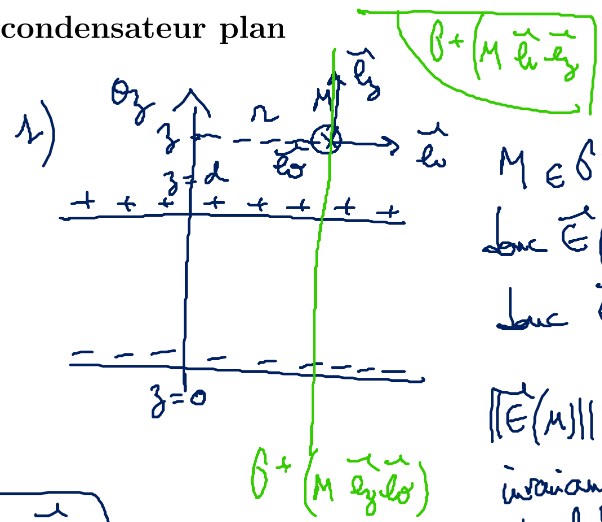
Correction CCINP 2023: condensateur plan



1)



$M \in \Pi^+(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$, $\Pi^+(M,\vec{e}_z,\vec{e}_\theta)$

donc $\vec{E}(M) \in$ à ces 2 plans

donc $\vec{E}(M)$ selon (Oz)

$\|\vec{E}(M)\| = E(\cancel{r},\cancel{\theta},z)$

invariance par translation — invariance par rotation

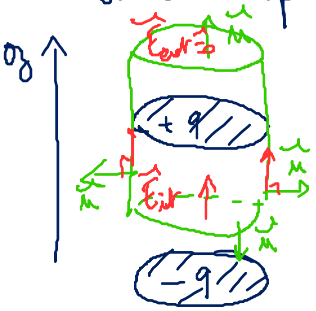
donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e}_z}$

Rq : Le plan (Oxy) est bien un plan Π^- mais M n'appartient pas à ce plan dans le cas général

2) $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ et $\vec{E}_{int}$ est uniforme

On choisit pour surface de Gauss un cylindre d'axe (Oz) et de section $S=\pi a^2$ (rayon a)

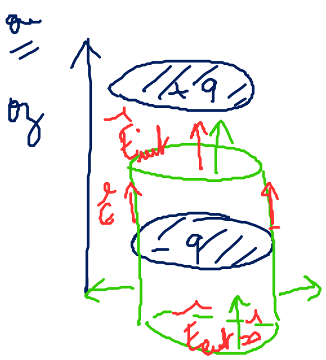
champ $\vec{E}$ est dirigé des charges + vers les charges −



$$\Phi = 0 + 0 - E_{int}\times S = \frac{q_{int}}{\varepsilon} = \frac{+q}{\varepsilon} \rightarrow \boxed{\vec{E}_{int} = \frac{-q}{\varepsilon S}\vec{e}_z = \frac{-q}{\varepsilon\pi a^2}\vec{e}_z}$$

($\vec{E}_{int}$ et $\vec{S}$ de sens contraire ; th. de Gauss)

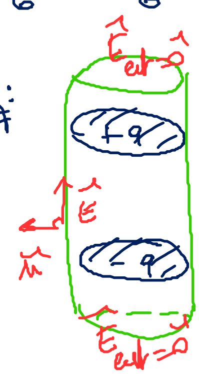
ou



$$\Phi = 0 + 0 + E_{int}\times S = \frac{q_{int}}{\varepsilon} = \frac{-q}{\varepsilon} \rightarrow \boxed{\vec{E}_{int} = \frac{-q}{\varepsilon\pi a^2}\vec{e}_z}$$

($\vec{E}_{int}$ et $\vec{n}$ de même sens)

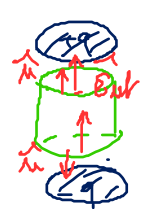
Rq :



$\Phi = 0$

$q_{int} = +q - q = 0$

$0 = 0$



$\Phi = E_{int}S - E_{int}S = 0$

$q_{int} = 0$

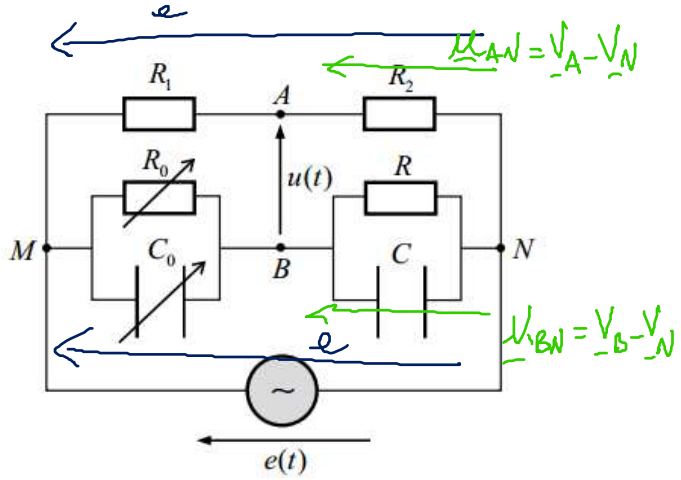
$0 = 0$

3) $$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{dV}{dz}\vec{e}_z = \frac{-q}{\varepsilon\pi a^2}\vec{e}_z$$

$$\frac{dV}{dz} = +\frac{q}{\varepsilon\pi a^2} \rightarrow V(z) = \frac{q}{\varepsilon\pi a^2}z + A$$

tension aux bornes du condensateur : $U = V(z=d) - V(z=0) = \frac{qd}{\varepsilon\pi a^2} = \frac{q}{C} \rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon\pi a^2}{d} = \frac{\varepsilon\times S}{d}}$

4)



R_1 et R_2 sont en série

On applique un diviseur de tension :

$$\underline{U}_{AN} = + \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times \underline{e}$$

de la même façon :

$$\underline{U}_{BN} = \frac{\underline{Z}_{BN}}{\underline{Z}_{BN} + \underline{Z}_{BN}} \times \underline{e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_0} \underline{e}$$

loi des mailles (ABN) : $\underline{u} - \underline{u}_{AN} + \underline{u}_{BN} = 0$

$$\underline{u} = \underline{u}_{AN} \underline{u}_{BN} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_0} \right) \underline{e}$$

$$= \frac{R_2 \underline{Z} + R_2 \underline{Z}_0 - R_1 \underline{Z} - R_2 \underline{Z}}{(R_1 + R_2)(\underline{Z} + \underline{Z}_0)} \underline{e}$$

5) $\underline{u} = 0 \Rightarrow R_2 \underline{Z}_0 = R_1 \underline{Z}$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} = \frac{1 + jR_0C_0\omega}{R_0}$$

$$\frac{R_2}{\underline{Z}} = \frac{R_1}{\underline{Z}_0} \Rightarrow \frac{R_2}{R} + jR_2C\omega = \frac{R_1}{R_0} + jR_1C_0\omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{R_2}{R} = \frac{R_1}{R_0} & \text{soit } R = \frac{R_2 R_0}{R_1} \\ R_2 C = R_1 C_0 & C = \frac{R_1 C_0}{R_2} \end{cases}$$