Epreuve spécifique CCINP 2023

Q24- Les grandeurs p_1, μ_1 et v_1 sont des infiniment petits d'ordre 1. L'approximation acoustique consiste à réaliser des développements limités à l'ordre 1 en perturbation pour linéariser les équations mécaniques et thermodynamiques.

Q25- L'équation d'Euler s'écrit: $(\rho_0+\rho_1)(\dfrac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t}+(\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v_1})=-\overrightarrow{\text{grad}}(p_0+p_1)=-\overrightarrow{\text{grad}}(p_1)$ (on néglige le poids).

Les termes $\rho 0\dfrac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t}$ et $-\overrightarrow{\text{grad}}(p_1)$ sont d'ordre 1

Les termes $\rho_1\dfrac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t}$ et $(\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v_1}$ sont d'ordre 2 donc on les néglige.

Il reste donc en projection sur Ox: $\rho_0\dfrac{\partial v_1}{\partial t}=-\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$.

L'équation de conservation de la masse s'écrit $\text{div}((\rho_0+\rho_1)\overrightarrow{v_1})+\dfrac{\partial(\rho_0+\rho_1)}{\partial \text{t}}=0$.

Le terme $\rho_1\overrightarrow{v_1}$ est d'ordre 2, on le néglige et ρ_0 est une constante donc $\dfrac{\partial\rho_0}{\partial t}=0$.

On a donc $\rho_0\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}=0$.

Q26- Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par $\chi_S=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial P}$ avec $\dfrac{\partial\rho}{\partial P}=\dfrac{\rho-\rho_0}{P-P_0}=\dfrac{\rho_1}{p_1}$ d'où $\chi_S=\dfrac{1}{\rho_0+\rho_1}\dfrac{\rho_1}{p_1}\approx\dfrac{\rho_1}{\rho_0 p_1}$ (on néglige $\rho_1 p_1$ car c'est un terme d'ordre 2).

On a donc $\chi_S=\dfrac{\rho_1}{\rho_0 p_1}$ d'où $\rho_1=\rho_0\chi_S p_1$.

Q27- On cherche une équation de type d'Alembert donc on commence par écrire:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial p_1}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(-\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t})=\frac{\partial}{\partial t}(-\mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\mu_1}{\partial t})=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_0\chi_S p_1)$$

p_1 vérifie donc l'équation $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}-\mu_0\chi_S\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=0$: c'est une équation de type d'Alembert avec pour vitesse de propagation des ondes $c_s=\sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\chi_S}}$.

Q28- Pour un GP qui subit des transformations adiabatiques réversibles on applique les lois de Laplace soit $PV^\gamma=P_0V_0^\gamma$ donne $P\rho^{-\gamma}=P_0\rho_0^{-\gamma}$ (en effet $\rho=\dfrac{m}{V}$ et la masse m est constante).

On a donc $P=P_0\dfrac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}$ et $\dfrac{dP}{d\rho}=P_0\gamma\dfrac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma}=\gamma\dfrac{P}{\rho}$. On remplace dans l'expression de χ_S: $\chi_S=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial P}=\dfrac{1}{\gamma P}$.

Ainsi la vitesse des ondes sonores dans un GP est $c_s=\sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}\approx\sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}}$.

Q29- On a $p_1(x,t)=p_{1m}\cos(\omega t-kx)$ et $\dfrac{\partial v_1}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p_1}{\partial x}$.

Donc $\dfrac{\partial v_1}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho_0}kp_{1m}\sin(\omega t-kx)$.

On intègre par rapport au temps: $v_1(x,t)=\dfrac{kp_{1m}}{\rho_0\omega}\cos(\omega t-kx)=\dfrac{p_{1m}}{\rho_0 c}\cos(\omega t-kx)$.

D'où l'impédance acoustique $Z_c=\dfrac{p_1}{v_1}=\rho_0 c$ pour une $OPPH^+$.

Pour une $OPPH^-$, l'impédance est $Z_c=-\rho_0 c$.

Q30- Le terme $\dfrac{1}{2}\rho_0 v_1^2$ désigne l'énergie cinétique volumique.

Le terme $\dfrac{1}{2}\chi_S p_1^2$ désigne l'énergie potentielle volumique liée aux forces de pression.

La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle désigne l'énergie mécanique (ici on néglige le poids donc l'energie potentielle de pesanteur n'intervient pas).

On a $<e>=\frac{\rho_0}{2}<\frac{p_{1m}^2}{\rho_0^2c^2}\cos^2(\omega t-kx)>+\frac{\chi_S}{2}<p_{1m}^2\cos^2(\omega t-kx)>$ avec $<\cos^2(...)>=\frac{1}{2}$.

On a donc $<e>=\frac{\rho_0}{2}\frac{p_{1m}^2}{2\rho_0^2c^2}+\frac{\chi_S}{2}\frac{p_{1m}^2}{2}=\frac{p_{1m}^2}{4\rho_0c^2}+\frac{\chi_S p_{1m}^2}{4}$ avec $\chi_S=\frac{1}{\rho_0c^2}$ soit $<e>=\frac{p_{1m}^2}{2\rho_0c^2}$.

Q31- La pression est homogène à une force divisée par une surface. Le produit force fois vitesse est homogène à une puissance. Donc l'intensité sonore est une puissance surfacique.

On a $I=<p_1v_1>=<p_1\frac{p_1}{\rho_0c}>=\frac{p_{1m}^2}{\rho_0c}<\cos^2(\omega t-kx)>=\frac{p_{1m}^2}{2\rho_0c}=c<e>$.

Q32- On utilise la définition du coefficient α_m soit $\alpha_m=\frac{P_a}{P_i}$ où P_i désigne la puissance incidente qui correspond ici à la puissance réverbérée par la pièce soit $P_i=I_rS$. On a donc $\alpha_m=\frac{P_a}{I_rS}$ d'où $P_a=\alpha_mI_rS$.

L'énergie sonore est égale à l'énergie volumique réverbérée multipliée par le volume de la pièce soit $\mathcal{E}(t)=<e_r>V$ avec $<e_r>=\frac{4I_r}{c}$ soit $\mathcal{E}(t)=\frac{4I_rV}{c}$.

Q33- L'énergie sonore de la pièce diminue à cause des phénomènes d'absorption soit $-\frac{d\mathcal{E}}{dt}=-P_a<0$ et en remplaçant par les expressions trouvées on a: $\frac{d}{dt}(\frac{4I_rV}{c})=-\alpha_mI_rS$. On en déduit l'équation différentielle $\frac{dI_r}{dt}+\frac{\alpha_mSc}{4V}I_r=0$.

La solution de cette équation différentielle s'écrit $I_r(t)=Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau=\frac{4V}{\alpha_mSc}$. On trouve la constante A avec les CI soit $I_r(t=0)=I_{r0}=A$ donc $I_r(t)=I_{r0}e^{-t/\tau}$.

Q34- On a $L(t=T_r)-L(t=0)=10\log(\frac{I_r(t=T_r)}{I_0})-10\log(\frac{I_{r0}}{I_0})=10\log(\frac{I_r(t=T_r)}{I_{r0}})=10\log(e^{-T_r/\tau})=10\frac{\ln(e^{-T_r/\tau})}{\ln 10}=\frac{-10T_r}{\tau\ln 10}$.

On cherche T_r tel que $L(t=T_r)-L(t=0)=-60\ dB$ soit $=\frac{-10T_r}{\tau\ln 10}=-60$ ou encore $T_r=6\ln 10\tau=\frac{24\ln 10}{c}\frac{V}{\alpha_mS}=0,16\frac{V}{\alpha_mS}$.

Q35- La salle a pour volume $V=lLh=5000\ m^3$ et pour surface $S=2lL+2h(l+L)=1900\ m^2$. On connaît le temps de réverbération d'une salle vide ($T_r=5\ s$) donc on peut calculer α_m d'une salle vide: $\alpha_m=\frac{0,16V}{ST_r}=8,4.10^{-2}$.

En présence du public, il y a de l'absorption par les parois de la salle et de l'absorption par le public. On suppose que le public occupe toute la surface en bas de la salle soit la surface lL et l'absorption du son par le public est donné par le coefficient $\alpha_{mp}=0,9$. Le reste de la surface de la salle soit $S'=lL+h(2l+2L)$ a pour coefficient d'absorption $\alpha_m=0,084$ calculé précédemment. Le temps de réverbération tient compte du fait que la réverbération est différente sur la surface du bas qui contient le public et sur les autres surfaces de la pièce.

On a donc $T_r=\frac{0,16lHL}{\alpha_mS'+\alpha_{mp}lL}=1,4\ s$: ce temps correspond au temps optimal pour un concert symphonique pour une fréquence moyenne de 1000 Hz, on peut en déduire que les conditions d'écoute sont bonnes.

Q36- La tranche d'air subit les forces de pression de l'air extérieur soit $+P_0s\overrightarrow{U_x}$ et les forces de pression de l'air de la cavité soit $-P_c(t)s\overrightarrow{U_x}$. La résultante des forces de pression est donc $\overrightarrow{F}_p=(P_0-P_c(t))s\overrightarrow{U_x}$.

L'air dans la cavité se comporte comme un GP et il subit des transformations isentropiques soit adiabatiques réversibles. On peut donc appliquer les lois de Laplace au gaz dans la cavité. A l'équilibre $x=0$: la pression dans la cavité est P_0 et son volume est V_c. Hors équilibre, la tranche d'air dans le col se déplace: la pression de la cavité est $P_c(t)$ et son volume est V_c-sx.

Les lois de Laplace s'écrivent $P_0V_c^\gamma=P_c(t)(V_c-sx)^\gamma$ ou encore en divisant par V_c^γ: $P_0=P_c(t)(1-\frac{sx}{V_c})^\gamma$ soit $P_c(t)=P_0((1-\frac{sx}{V_c})^{-\gamma}\approx P_0(1+\gamma\frac{sx}{V_c})$.

On en déduit la résultante des forces de pression sur la tranche d'air: $\overrightarrow{F}_p=-\gamma\frac{s^2x}{c}P_0\overrightarrow{U_x}=-kx\overrightarrow{U_x}$.

Par identification on a $k = \dfrac{\gamma s^2 P_0}{V_c}$.

Or d'après la question Q28, on a $\gamma P_0 = \rho_0 c^2$ soit $k = \dfrac{s^2 \rho_0 c^2}{V_c}$.

Q37- On applique la RFD à la tranche d'air dans le col (tranche d'air de volume ls et de masse $\rho_0 ls$): $\rho_0 ls \dfrac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{U_x} = -kx\overrightarrow{U_x}$ soit en projection sur Ox: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{\rho_0 ls}x = 0$.

On reconnaît un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{\rho_0 ls}} = \sqrt{\dfrac{sc^2}{lV_c}}$. On en déduit la fréquence propre des oscillations $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{sc^2}{lV_c}}$.

Q38- Le modèle utilisé aboutit à un OH, on devrait donc observer des oscillations dont l'amplitude ne varie pas. En réalité l'amplitude des oscillations diminue car il y a des phénomènes dissipatifs. Un ordre de grandeur du facteur de qualité se déduit du nombre d'oscillations. La valeur de Q est égale au nombre d'oscillations observées avant que le signal ne s'annule, on peut écrire que $Q \approx 20$.

Q39- Avec les valeurs numériques données on peut calculer la fréquence théorique: $f_0 = 118\ Hz$.

Sur la courbe, en faisant l'hypothèse que la pseudo-période est confondue avec la période propre on mesure $20T_0 = 0,20\ s$ soit $T_0 = 10^{-2}\ s$ et $f_0 = 100\ Hz$.

Q40- La tranche d'air dans le col subit la force de pression de l'air extérieur $+(P_0 + p(t))s\overrightarrow{U_x}$ et la force de pression de l'air dans la cavité $-P_c(t)\overrightarrow{U_x}$. La résultante de forces de pression est $(P_0 - P_c(t))s\overrightarrow{U_x} + p(t)s\overrightarrow{U_x} = -kx\overrightarrow{U_x} + p(t)s\overrightarrow{U_x}$.

On applique la RFD à la tranche d'air de masse $\rho_0 sl$ dans le col: $\rho_0 sl\ddot{x} = -kx + p(t)s$

On étudie le régime sinusoidal forcé imposé par le haut parleur qui impose la pression $p(t)$ donc on passe en notation complexe. L'équation différentielle devient:

$\rho_0 sl(-\omega^2\underline{x}) = -k\underline{x} + \underline{p}s$ soit $\underline{x}(\dfrac{k}{\rho_0 sl} - \omega^2) = \dfrac{\underline{p}}{\rho_0 l}$ avec d'après l'étude précédente $\omega_0^2 = \dfrac{k}{\rho_0 sl}$.

On a donc $\underline{x} = \dfrac{\underline{p}}{\rho_0 l(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

On en déduit la vitesse par $v = \dot{x}$ en notation réelle soit $\underline{v} = j\omega\underline{x}$ en notation complexe d'où: $\underline{v} = \dfrac{j\omega\underline{p}}{\rho_0 l(\omega_0^2 - \omega^2)}$ et en passant à l'amplitude complexe: $\underline{v}_m = \dfrac{j\omega\underline{p}_m}{\rho_0 l(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Pour $\omega = \omega_0$, il y a un phénomène de résonance, l'amplitude diverge. En réalité à résonance, l'amplitude ne diverge pas car il y a des phénomènes dissipatifs.

Q41- L'onde incidente et l'onde transmise sont des OPH^+ donc $\underline{v}_i = \dfrac{\underline{p}_i}{Z_c}$ et $\underline{v}_t = \dfrac{\underline{p}_t}{Z_c}$ avec $Z_c = \rho_0 c$.

L'onde réfléchie est une $OPPH^-$ donc $\underline{v}_r = \dfrac{-\underline{p}_r}{Z_c}$.

Q42- En appliquant la continuité de la surpression en $z = 0$ on a $\underline{p_i}(z = 0) + \underline{p_r}(z = 0) = \underline{p_t}(z = 0)$ soit $p_m = \underline{p}_{im} + \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{tm}$.

On applique la continuité du débit volumique en $z = 0$: Il y a un débit volumique d'air en $z = 0^-$ liée à l'onde incidente et l'onde réfléchie: $(\underline{v}_i(z = 0) + \underline{v}_r(z = 0))S$, un débit volumique d'air en $z = 0^+$ liée à l'onde transmise dans la conduite : $\underline{v}_t(z = 0)S$ et un débit volumique d'air liée à l'onde transmise dans le résonateur: $\underline{v}s$.

La conservation du débit volumique s'écrit: $(\underline{v}_i(z = 0) + \underline{v}_r(z = 0))S = \underline{v}_t(z = 0)S + \underline{v}s$ d'où $\dfrac{1}{Z_c}(\underline{p}_{im} - \underline{p}_{rm})S = \dfrac{1}{Z_c}\underline{p}_{tm}S + \underline{v}_m s$.

Q43- On exprime $\dfrac{|\underline{p}_{im}|^2}{|\underline{p}_{tm}|^2} = |1 - \dfrac{j}{2\beta(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}|^2 = 1 + \dfrac{1}{4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}$. On a alors $L = 10\log(1 + \dfrac{1}{4\beta^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2})$.

Q44- Le résonateur se comporte comme un filtre passa bande puisqu'il coupe les BF et les HF.

Lorsque α augmente, le filtre est moins sélectif, la bande passante est plus large et le coefficient de transmission est plus faible donc le résonateur coupe mieux le son.