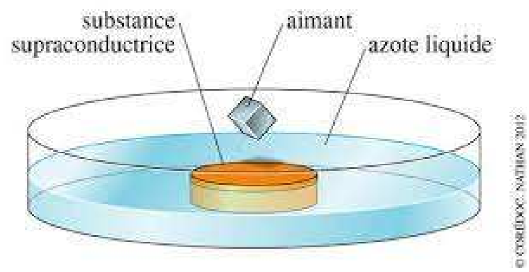
DM de physique

I. **Effet Meissner**

Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique. On parle d'effet Meissner.

On se propose de réaliser une expérience mettant en évidence ce phénomène. On pose un aimant permanent sur un matériau supraconducteur. On fait alors baigner le supraconducteur dans du diazote liquide pour abaisser sa température en-dessous de sa température critique. Il devient alors supraconducteur et se met à rejeter les lignes de champ magnétique de l'aimant : le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur devient nul et l'aimant se met alors à léviter.



Comparaison avec l'électromagnétisme classique

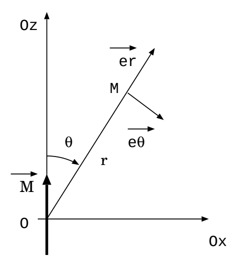
1. Le supraconducteur se comporte comme un conducteur électrique parfait. Or dans un conducteur électrique parfait le champ électrique est nul. À partir d'une des équations de Maxwell, en déduire que le champ magnétique à l'intérieur du conducteur parfait est forcément un champ stationnaire.

On se propose de modéliser le supraconducteur par une boucle de courant circulaire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I et de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$. On veut estimer l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour faire léviter l'aimant d'une hauteur h.

2. Représenter la boucle de courant qui modélise le supraconducteur et le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ du supraconducteur. Donner l'expression du moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ placé en O en un point M:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi OM^5}(3(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - OM^2\overrightarrow{\mathcal{M}})$$



3. Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en M en fonction de r, θ, μ_0, $\mathcal{M}$, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. En déduire l'expression du champ magnétique en M lorsque M est sur l'axe Oz et lorsque M est sur l'axe Ox à un distance r de O. Représenter ces champs magnétiques en ces deux points.

4. Pour cette question, il faut que vous preniez des initiatives dans le choix de votre démarche: L'aimant permanent possède un moment magnétique $\mathcal{M}_a = 10\ A.m^2$. Il lévite à une hauteur h au-dessus du supraconducteur et il a pour masse $m = 40\ g$. Déduire de ces informations un ordre de grandeur de l'intensité I dans la boucle de courant qui modélise le supraconducteur. On donne la force subie par un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}_a}$ placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$: $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{\mathcal{M}_a}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{B}$. Donnée: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ SI$. Vous estimerez les valeurs numériques de h et R grâce à la photo donnée dans l'énoncé.

Champ magnétique dans le supraconducteur

Pour expliquer cette différence, les frères London (1935) ont postulé que les électrons dans un supraconducteur ne suivent pas les mêmes lois que ceux du conducteur parfait. Ils montrèrent que la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ dans le supraconducteur s'écrit:

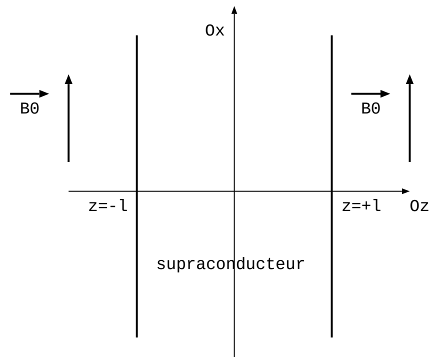
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{j} = -\frac{1}{\mu_0 \Lambda^2}\overrightarrow{B}$$

avec $\overrightarrow{B}$, le champ magnétique dans le supraconducteur et Λ une constante positive.

5. Déterminer l'unité de la constante Λ.

6. La théorie montre que $\lambda = \sqrt{\dfrac{m}{\mu_0 n e^2}}$ où m est la masse de l'électron, n la densité d'électrons supraconducteurs par unité de volume et e la charge élémentaire. Evaluer λ pour l'aluminium en supposant qu'il y a deux électrons supraconducteurs par atome. Données: pour l'aluminium: $\rho = 2700\ kg.m^{-3}$, $M = 27\ g/mol$, $\mathcal{N}_a = 6,01.20^{23}\ mol^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ H.m^{-1}$, $e = 1,6.10^{-19}\ C$ et $m = 9,1.10^{-31}\ kg$.

On s'intéresse maintenant à un supraconducteur situé entre les plaques d'équations $z = -l$ et $z = +l$ et infini selon (Ox) et (Oy). On choisit l'origine du repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu des plaques. A l'extérieur du supraconducteur, le champ magnétique est statique et uniforme tel que $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_x}$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $z = \pm l$. On se place en régime statique, les champs ne dépendent pas du temps.



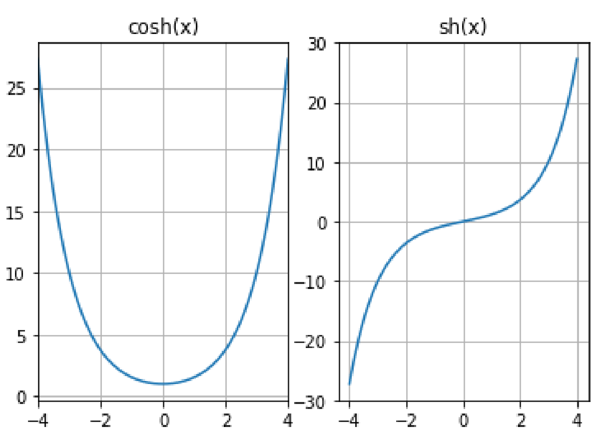
7. Le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\overrightarrow{e_x}$. Justifier cette écriture.

8. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $B(z)$. On donne: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$.

9. Montrer que $B(z) = B_0\dfrac{\cosh(\alpha)}{\cosh(\beta)}$. Exprimer α et β en fonction de z, λ et l. On rappelle que $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

10. En déduire l'expression du vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$.

11. On donne les courbes $\cosh(x)$ et $\tanh(x)$.



Pour $\Lambda = 2\ mm$ et $l = 2\ mm$ donner l'allure des courbes $B(z)$ et $j(z)$ dans le supraconducteur. Commenter.

Pour $\Lambda = 20\ nm$ et $l = 1\ cm$ donner l'allure des courbes $B(z)$ et $j(z)$ dans le supraconducteur. Commenter.