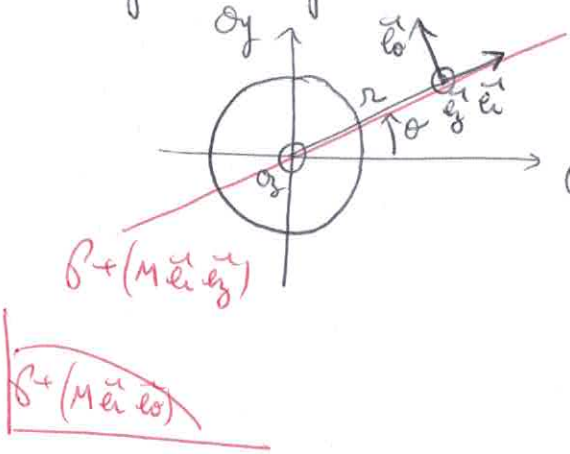
Fil cylindrique uniformément chargé

1) On regarde le cylindre vu de dessus :



$M \in \mathcal{P}^+(M\,\vec{e_r}\,\vec{e_z})$ et $\mathcal{P}^+(M\,\vec{e_r}\,\vec{e_\theta})$

donc $\vec{E}(M) \in$ à ces plans

donc $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{e_r}$

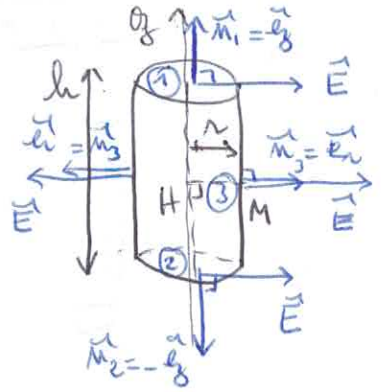
$\|\vec{E}(M)\| = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$ — invariance par rotation autour de Oz ; invariance par translation selon Oz

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}}$

De même le potentiel ne dépend que de r donc les surfaces équipotentielles sont telles que $V(r)$ est constant donc r constant : les équipotentielles sont des cylindres centrés sur (Oz)

---

2) On choisit pour surface de Gauss un cylindre d'axe (Oz) et de rayon $r = HM$ et de hauteur h.



$$\Phi = \oiint \vec{E}(M)\, dS\, \vec{n}(M)$$

$$= \underbrace{\iint E(r)\vec{e_r}\, dS\, \vec{e_z}}_{①} + \underbrace{\cancel{\iint E(r)\vec{e_r}\, dS(-\vec{e_z})}}_{②} + \underbrace{\iint E(r)\vec{e_r}\, dS\, \vec{e_r}}_{③}$$

$$= \iint_{③} E(r)\, dS$$

on peut sortir $E(r)$ de l'intégrale car sur la surface latérale notée ③ $r = $ cste donc $E(r) = $ cste

$$= E(r) \iint_{③} dS$$

surface latérale du cylindre $= 2\pi r h$

d'où $\boxed{\Phi = E(r)\, 2\pi r h}$

On distingue 2 cas :

Cas 1 : $r < R$

des charges intérieures sont dans le volume : $\pi r^2 h$ (volume du cylindre)

$q_{int} = \rho \pi r^2 h$

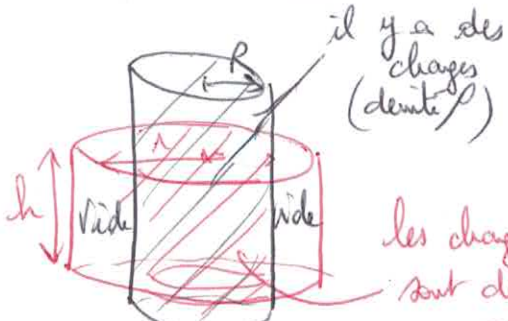
d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = E(r)\, 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

soit $E(r)\, 2\pi r h = \dfrac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon}$

soit $\boxed{\vec{E}(r) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon}\vec{e_r}}$

Cas 2 : $r > R$



les charges intérieures sont dans le volume $\pi R^2 h$

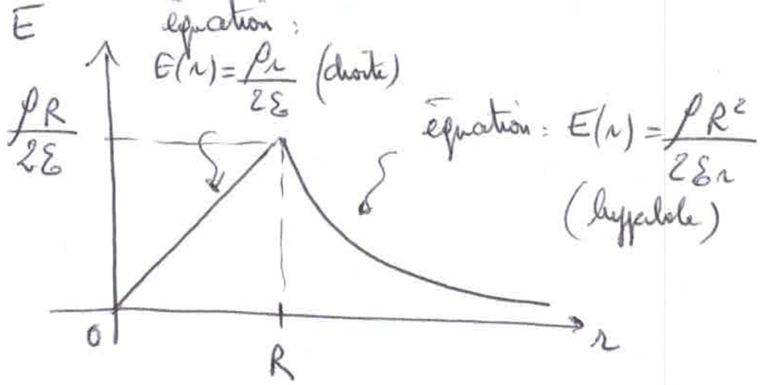
$q_{int} = \rho \pi R^2 h$

d'après le théorème de Gauss

$$\phi = E(r)\, 2\pi r\, h = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

soit $$E(r)\, 2\pi r\, h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon}$$

soit $$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon r}\,\vec{e_r}}$$



$\|\vec{E}\|$ est maximale à la surface du cylindre soit en $r = R$

$$\boxed{\|\vec{E}_{max}\| = E(r=R) = \frac{\rho R}{2\varepsilon}}$$

---

3) $\vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}\,\vec{e_r}$

Il y a deux expressions du champ électrique donc deux expressions du potentiel à distinguer selon que $r < R$ ou $r > R$.

pour $r < R$: $E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon} = -\frac{dV}{dr}$ d'où $V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} + A$

pour $r > R$: $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon r} = -\frac{dV}{dr}$ d'où $V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon}\ln r + B$

On exprime la continuité du potentiel en $r = R$:

$$V(r = R^-) = V(r = R^+)$$

$$-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon} + A = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon}\ln R + B \quad \text{d'où} \quad B = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon}\ln R - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon} + A$$

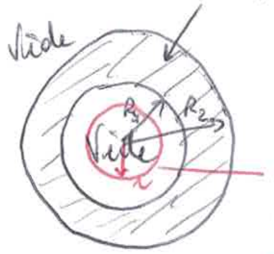
soit
$$\boxed{\begin{aligned} V(r) &= -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} + A \quad \text{pour } r < R \\ V(r) &= -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{r}{R}\right) + 1\right] + A \quad \text{pour } r > R \end{aligned}}$$

---

4) Les symétries et les invariances sont inchangées donc on a encore $\underline{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}}$ et on garde pour surface de Gauss le cylindre de rayon r et d'axe (Oz) soit $\underline{\phi = E(r)\, 2\pi r h}$

Cas 1 : $r < R_1$

Vue de dessus



il n'y a pas de charges dans la surface de Gauss

$\boxed{q_{int} = 0}$

$$\phi = E(r)\, 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\varepsilon} = 0$$

soit $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

Cas 2 : $R_1 < r < R_2$

Vue de dessus

les charges intérieures sont entre les cylindres de rayon R_1 et de rayon r soit dans le volume $\underbrace{\pi r^2 h}_{\text{volume du grand cylindre}} - \underbrace{\pi R_1^2 h}_{\text{volume du petit cylindre}}$

$$\boxed{q_{int} = \rho\, \pi (r^2 - R_1^2)\, h}$$

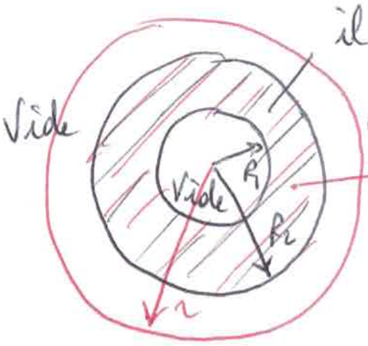
$$\phi = E(r)\, 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

$$E(r)\, 2\cancel{\pi} r \cancel{h} = \frac{\rho \cancel{\pi} (r^2 - R_1^2) \cancel{h}}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2 \varepsilon r}\, \vec{e_r}}$$

Cas 3 : $R_2 < r$

Vue de dessus



les charges intérieures sont entre les cylindres de rayons R_1 et R_2 soit dans le volume : $\underbrace{\pi R_2^2 h}_{\text{volume du grand cylindre}} - \underbrace{\pi R_1^2 h}_{\text{volume du petit cylindre}}$

$$\boxed{q_{int} = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) h}$$

$$\phi = E(r)\, 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

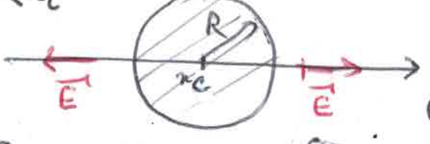
$$E(r)\, 2\cancel{\pi} r \cancel{h} = \frac{\rho \cancel{\pi} (R_2^2 - R_1^2) \cancel{h}}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2 \varepsilon r}\, \vec{e_r}}$$

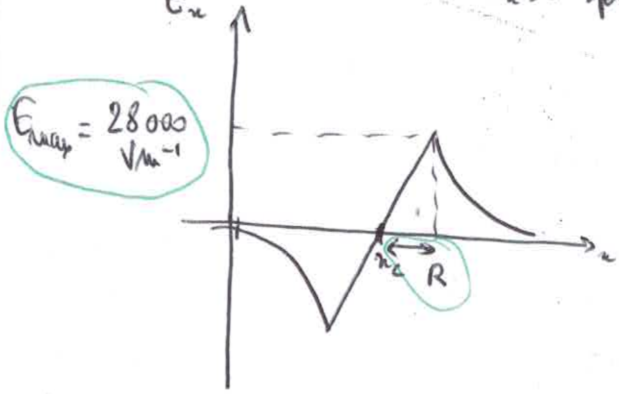
5)

Distribution 1

$E_x < 0$ pour $x < x_c$



$E_x > 0$ pour $x > x_c$



c'est la courbe a

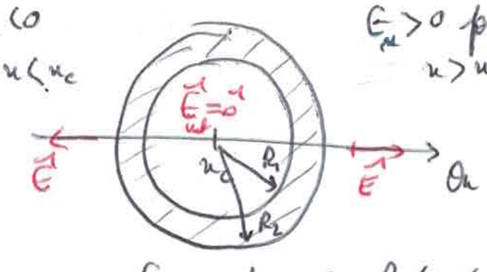
On lit : $R = 5\,cm$

$$E_{max} = \frac{\rho R}{2\varepsilon} \rightarrow \boxed{\rho = \frac{2\varepsilon E_{max}}{R}} = 9{,}9\,10^{-6}\ C\,m^{-3}$$

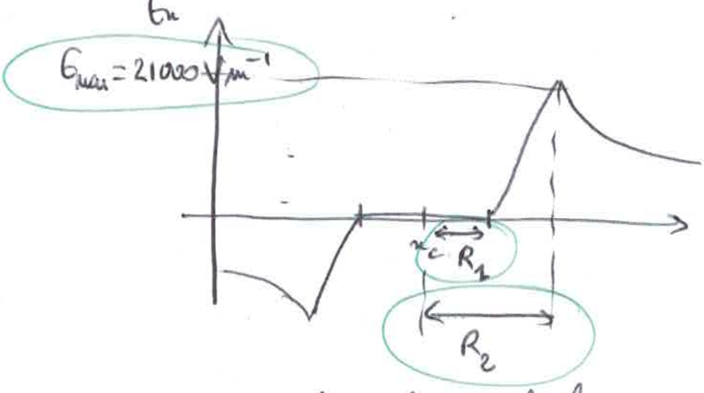
Distribution 2

$E_x < 0$ pour $x < x_c$

$E_x > 0$ pour $x > x_c$



$E_x = 0$ pour $x_c - R < x < x_c + R$



c'est la courbe b

On lit $R_1 = 2{,}5\,cm$

$R_2 = 5\,cm$

$$E_{max} = E(r = R_2) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon R_2}$$

soit $\boxed{\rho = \dfrac{2\varepsilon E_{max} R_2}{R_2^2 - R_1^2}} = 9{,}9.10^{-6}\ C\,m^{-3}$