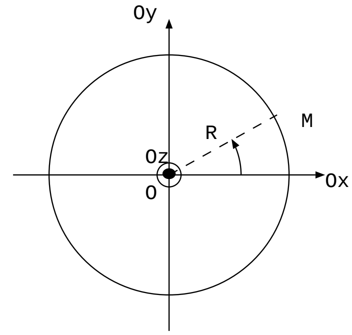
TD de cinématique

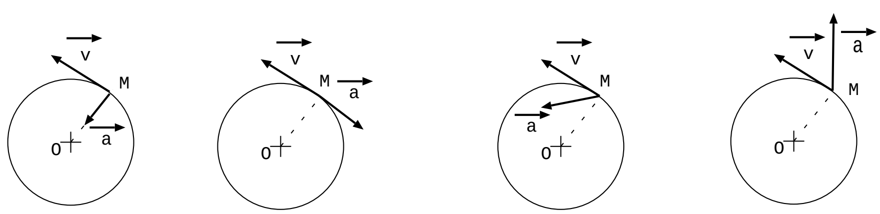
I. **Mouvement circulaire**

Un point M décrit un cercle de rayon R et de centre O. On repère M par ses coordonnées polaires $(R, \theta(t))$.

1. Ajouter sur le schéma les vecteur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ de la base polaire. Exprimer les vecteurs position position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$ de M dans le référentiel $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Qu'appelle-t-on accélération radiale? orthoradiale? Que dire de l'accélération radiale? Quand l'accélération orthoradiale est-elle nulle?

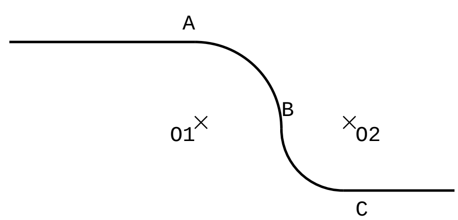


2. On donne les vecteurs vitesse et accélération en M. Préciser les cas où le mouvement est possible. Dans cas cas, préciser la nature du mouvement: uniforme, accéléré ou décéléré.



II. **Vecteur accélération**

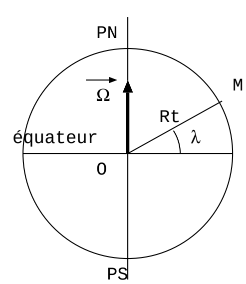
Représenter et calculer l'accélération d'un mobile se déplaçant à la vitesse $v = 90\ km/h$ constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles raccordés par deux quarts de cercle (de même rayon $R = 20\ m$ de centres respectifs O_1 et O_2): avant A, entre A et B, entre B et C et après C.



Réponses: $a = 0$ *et* $a = 6\ m.s^{-2}$

III. **Mouvement d'entraînement de la Terre**

Soit un point M de latitude λ sur Terre. Préciser la trajectoire décrite par M dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel la terre tourne à la vitesse angulaire Ω avec une période $T = 24\ h$). Exprimer la norme de la vitesse et la norme de l'accélération de M. Données: $R_t = 6400\ km$, $\lambda = 40^0$.



Réponses: $v = 357\ m.s^{-1}$ *et* $a = 2,2.10^{-2}\ m.s^{-2}$

IV. **Satellite géostationnaire**

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Sa période de révolution est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même. Il ressent une accélération $a = g\dfrac{R_T^2}{r^2}$. Données: $R_T = 6400\ km$, $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

1. Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis sa vitesse angulaire Ω.

2. Déterminer l'altitude du satellite en orbite géostationnaire.

3. Déterminer la valeur de sa vitesse en $km.h^{-1}$.

Réponses: 1- $\Omega = 7,3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$ *2-* $h = 35\ 800\ km$ *3-* $v = 11070\ km.h^{-1}$

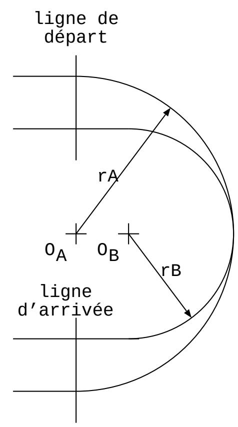
V. **Course automobile**

Lors d'une course automobile, deux voitures A et B partent de la ligne de départ et abordent un virage circulaire de deux manières différentes :

• le pilote A est à l'extérieur et suit une trajectoire circulaire de centre O_A et de rayon $r_A = 90\ m$

• le pilote B est à l'intérieur et suit une trajectoire circulaire de centre O_B et de rayon $r_B = 75\ m$

L'objectif est de comparer les deux choix de trajectoire et de savoir quel pilote atteint la ligne d'arrivée en premier.



1. Exprimer les longueurs L_A et L_B des trajectoires respectives des deux voitures entre la ligne de départ et la ligne d'arrivée.

2. On suppose que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant toute la course. Exprimer ces vitesses sachant que, pour des questions d'adhérence, l'accélération doit rester inférieure à $0,8\ g$ et que les voitures roulent à la vitesse maximale possible. Donnée: $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

3. En déduire les temps t_A et t_B au bout desquels chaque voiture se retrouve sur la ligne d'arrivée. Conclure : quel est le meilleur choix de trajectoire ?

Réponses: 1- $L_A = 283\ m$ *et* $L_B = 266\ m$ *2-* $v_A = 26,2\ m.s^{-1}$ *et* $v_B = 23,8\ m.s^{-1}$

VI. **Spirale**

On donne les équations horaires du mouvement d'un point matériel M en coordonnées polaires: $r(t) = r_0 e^{-t/\tau}$ et $\theta(t) = \omega t$ où r_0, ω et τ sont des constantes

1. Donner les unités de ω et τ.

2. Déterminer les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération de M dans la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

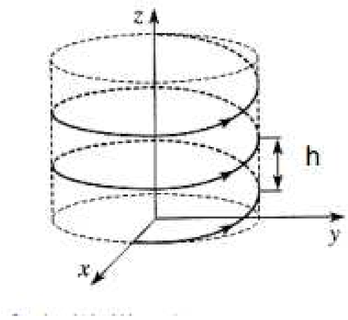
3. Exprimer la norme du vecteur vitesse.

4. Montrer que l'angle formé entre le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ et le vecteur vitesse est indépendant de la position occupée sur la trajectoire. Penser à utiliser $\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{v}$.

Réponses: 3- $||\overrightarrow{v}|| = r_0 e^{-t/\tau}\sqrt{\omega^2 + \dfrac{1}{\tau^2}}$

VII. **Hélice**

Dans le château d'Amboise, une immense rampe (plan incliné lisse, dépourvu de marche) en colimaçon permettait aux cavaliers de passer du niveau de la Loire au plateau où est construit le château, sans descendre de cheval. Le chevalier Lancelot du Lac, monté sur son fier destrier, se déplace sur ce colimaçon selon une trajectoire décrite en coordonnées cylindriques par $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega t$ et $z = bt$ où R, ω et b sont des constantes.



1. Déterminer les unités de b et de ω.

2. Exprimer le pas h de l'hélice en fonction de b et ω.

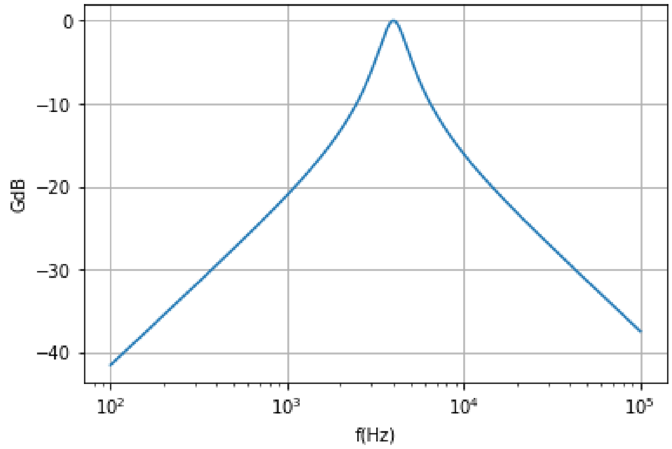
3. Exprimer en coordonnées cylindriques les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$.

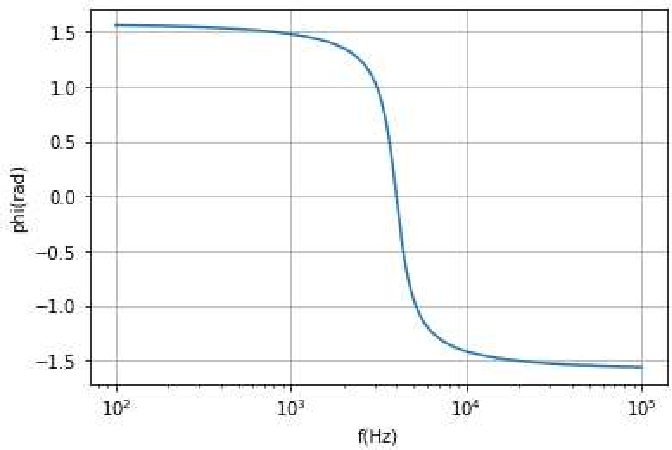
4. Exprimer la norme du vecteur vitesse et conclure.

Réponses: 2- $h = \dfrac{2\pi b}{\omega}$ *4-* $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{b^2 + \omega^2 R^2}$

VIII. **Etude d'un filtre**

On donne la fonction de transfert d'un filtre: $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$ et les diagrammes de Bode en gain et en fréquence associés à ce filtre:





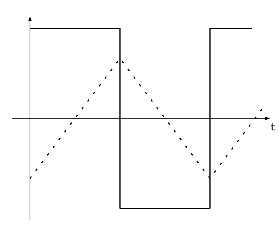
1. Mesurer la pente des asymptotes et retrouver ses pentes par la théorie. En déduire les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.

2. Déduire du diagramme de Bode en gain les valeurs numériques de ω_0 et de Q.

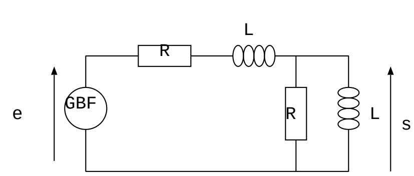
3. Rappeler l'expression de la tension de sortie $s(t)$ pour une tension d'entrée de la forme $e(t) = E\cos(2\pi f t)$.

On donne la tension d'entrée $e(t) = 3 + 2\cos(2\pi 1000 t) + 6\cos(2\pi 5000 t)$, déterminer la tension de sortie. Tracer les spectres en amplitude de $e(t)$ et de $s(t)$.

4. Prévoir si le filtre est intégrateur ou dérivateur à BF. On donne $e(t)$ et $s(t)$ à BF. Identifier les courbes qui correspondent à $e(t)$ et $s(t)$.



5. On donne le montage suivant. Vérifier par l'étude de son comportement aux BF et HF que le filtre est de même nature que le filtre étudié.



Réponses: $\omega_0 = 25.10^3\ rad.s^{-1}$ *et* $Q = 3$