

Concours Blanc physique

Le sujet comprend deux problèmes indépendants, eux mêmes composés de plusieurs parties indépendantes. Vous pouvez traiter les problèmes dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroté les pages au format i/N où i est le numéro de page et N le nombre de pages.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

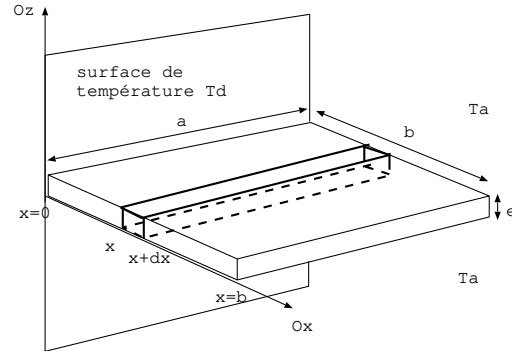
I. Problème I : dissipateur thermique

Partie A: Principe de fonctionnement

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée par les transistors des microprocesseurs, par les moteurs... Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.



On modélise une de ces ailettes par un parallélépipède d'épaisseur e selon Oz , de largeur a selon Oy , de longueur b selon Ox et de conductivité thermique λ . Elle est accolée en $x = 0$ au composant de température T_d et le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température T_a uniforme. En régime stationnaire, supposé atteint dans toute ce problème, la température $T(x)$ est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse x pour $0 \leq x \leq b$.



1. Enoncer et commenter la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

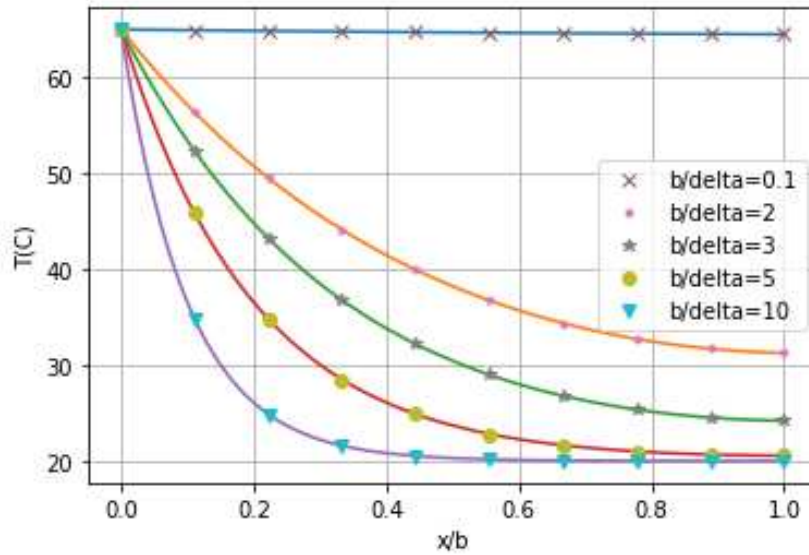
L'air qui entoure le solide, de température uniforme T_a , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton : $\vec{j}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a)\vec{n}$ où $\vec{j}_{cc}$ correspond à la densité de flux conducto-convectif et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient h est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

Données: $a = 50 \text{ mm}$, $e = 2 \text{ mm}$ et Conductivités thermiques : silicium $\lambda_{Si} = 148 \text{ SI}$, aluminium $\lambda_{Al} = 237 \text{ SI}$, acier $\lambda_{acier} = 50 \text{ SI}$

2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que l'équation de diffusion s'écrit $\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{T(x)}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda e}{2h}}$ pour $e \ll a$.

3. On donne $h = h_v = 300 \text{ SI}$ le coefficient de transfert en présence de ventilation et $h = h_s = 30 \text{ SI}$ le coefficient de transfert en absence de ventilation. Expliquer le fait que $h_v > h_s$. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en aluminium en présence de ventilation et en absence de ventilation.

4. On résout l'équation de diffusion sous python, on obtient les courbes $T(x)$ en fonction de x/b pour $b = \delta/10$, $b = 2\delta$, $b = 3\delta$, $b = 5\delta$ et $b = 10\delta$.

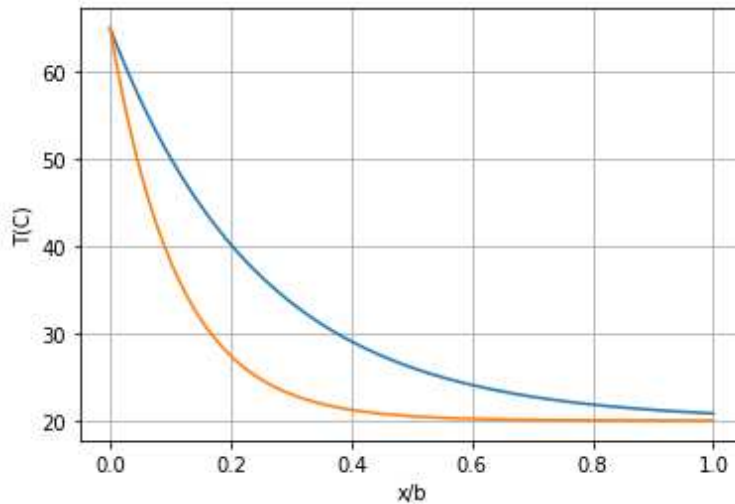


Déduire de ces courbes les valeurs numériques de T_d et T_a . Pour quelles valeurs de b/δ , la température en bout d'ailette atteint-elle la température de l'air? Expliquer physiquement le phénomène.

5. On suppose dans cette question que b , la longueur de l'ailette, vérifie la condition $b \gg \delta$.

5.a. Rappeler dans le cas $b \gg \delta$ les conditions aux limites et résoudre l'équation de diffusion. Montrer que la température dans l'ailette s'écrit $T(x) = T_a + (T_d - T_a)e^{-x/\delta}$.

5.b. On donne les courbes représentant la température dans l'ailette en fonction de x/b en absence de ventilation et en présence de ventilation. Identifier la courbe correspondant au cas où la ventilation fonctionne.



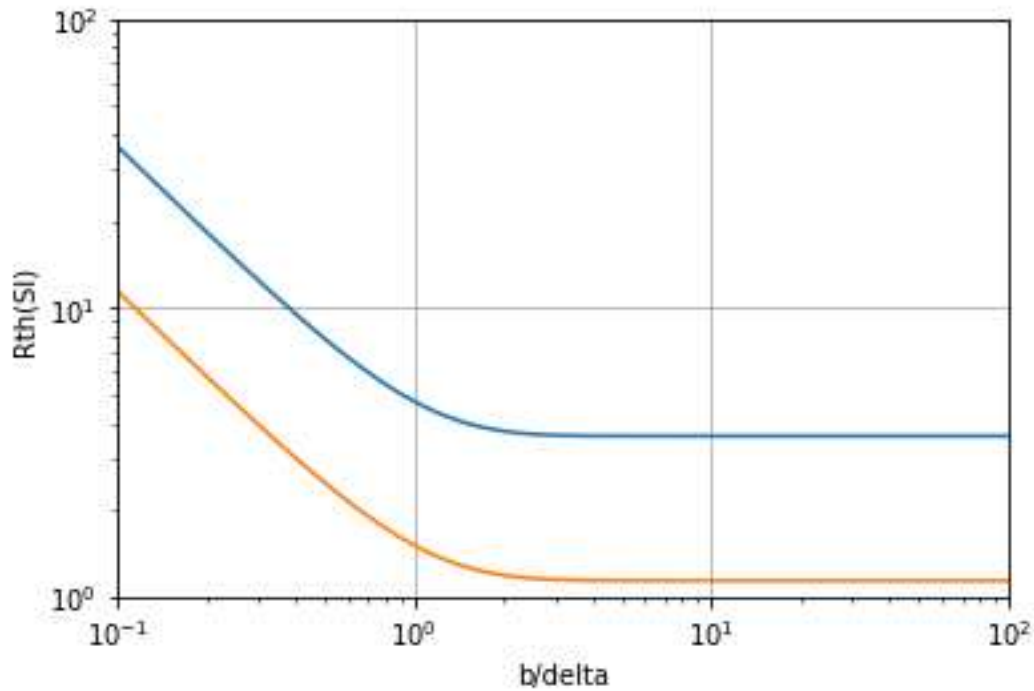
5.c. Montrer que la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air s'écrit $\mathcal{P} = 2ah(T_d - T_a)\delta$ pour $e \ll a$.

5.d. Par analogie avec l'électricité, définir la notion de résistance thermique R_{th} et montrer que la résistance thermique de l'ailette est $R_{th} = \frac{1}{a\sqrt{2\lambda h e}}$. Justifier physiquement la dépendance de la résistance thermique en fonction de λ et h . Les ailettes sont fabriquées en aluminium, justifier le choix et calculer les résistances thermiques de l'ailette en aluminium en présence de ventilation.

6. On se place maintenant dans le cas général, l'hypothèse $b \ll \delta$ n'est pas forcément vérifiée.

6.a. La condition aux limites en $x = b$ s'écrit $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x = b) = h(T(x = b) - T_a)$. Expliquer le sens physique de cette condition.

On donne les courbes R_{th} en fonction de b/δ (en échelle logarithmique) pour l'aluminium avec et sans ventilation.



6.b. Identifier les courbes en justifiant votre réponse.

6.c. Interpréter physiquement la présence d'asymptotes horizontales. Lire les valeurs numériques des résistances sur les asymptotes horizontales et vérifier la cohérence avec l'étude précédente.

6.d. En pratique, les ailettes en aluminium ont pour longueur $b = 2,8 \text{ cm}$. Rappeler les valeurs numériques de δ pour les ailettes en aluminium avec et sans ventilation, en déduire les valeurs numériques de b/δ dans chaque cas et lire la valeur de R_{th} correspondante. En déduire une estimation du nombre d'ailettes à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par 50°C en régime stationnaire de fonctionnement dans une pièce de température $T_a = 20^\circ\text{C}$.

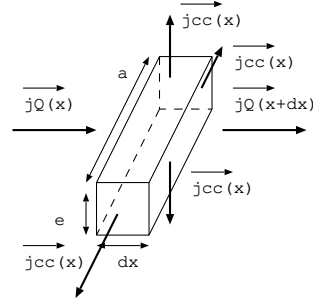
II. Correction : problème I partie A

1. La loi de Fourier s'écrit $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$: elle traduit que le transfert thermique se fait des fortes vers les faibles températures et qu'il est d'autant plus efficace que les inhomogénéités de températures sont grandes et que la conductivité thermique est élevée.

2. On considère le système élémentaire de section πa^2 compris entre les abscisses x et $x+dx$. En régime stationnaire, la puissance thermique reçue est égale à la puissance thermique perdue soit:

avec pour puissance reçue $P_{th,r} = j_Q(x)ea$

avec pour puissance perdue $P_{th,p} = j_Q(x+dx)ea + j_{cc}(x)(2a+2e)dx$



soit $(j_Q(x+dx) - j_Q(x))ae + j_{cc}(x)2(a+e)dx = 0$ qui après un DL (car dx petit devient $\frac{dj_Q}{dx}aedx + j_{cc}(x)2(a+e)dx = 0$ avec $j_{cc}(x) = h(T(x) - T_a)$ et $j_Q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$. On obtient donc l'équation: $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h(a+e)}{\lambda ae}T = -\frac{2h(a+e)}{\lambda ae}T_a$.

Par identification avec l'énoncé on a $\delta = \sqrt{\frac{\lambda ae}{2h(a+e)}} \approx \sqrt{\frac{\lambda e}{2h}}$.

3. D'après la loi de Newton, plus le coefficient de transfert est grand et plus les échanges conducto-convectifs sont importants. Effectivement, la présence du ventilateur permet d'améliorer les échanges par convection et donc d'augmenter la valeur de h .

$$[j_{cc}] = [j_Q] = J.m^{-2}.s^{-1} = W.m^{-2}$$

$$[h] = \left[\frac{j_{cc}}{T}\right] = W.m^{-2}.K^{-1}$$

$$[\lambda] = \left[\frac{j_Q}{\frac{dT}{dx}}\right] = W.m^{-2}.K^{-1}.m$$

on a donc $\left[\sqrt{\frac{\lambda e}{2h}}\right] = \left(\frac{W.m^{-2}.K^{-1}.m.m}{W.m^{-2}.K^{-1}}\right)^{1/2} = m$: c'est homogène à une distance comme c'est attendu dans

l'équation différentielle. AN: $\delta = \sqrt{\frac{237.2.10^{-3}}{2.300}} = 2,8 \text{ cm}$ avec ventilation et $\delta = 8,8 \text{ cm}$ sans ventilation.

4. La température T_d se lit en $x/b = 0$ (qui correspond à $x = 0$) soit $T_d = 65^\circ C$ et la température T_a se lit en $x/b = 1$ (qui correspond à $x = 1$) soit $T_a = 20^\circ C$. Cette température n'est atteinte que pour des ailettes suffisamment grandes. En effet pour $b > 5\delta$, la courbe $T(x)$ atteint une asymptote horizontale de valeur T_a , ce qui veut dire que la diffusion a pu se faire dans toute l'ailette pour atteindre au bout de l'ailette la température de l'air. Si l'ailette est trop petite, la diffusion n'a pas le temps de se faire sur la longueur de l'ailette et la température diminue dans l'ailette sans atteindre la température de l'air. Dans le cas extrême où $b = \delta/10$, la température ne varie pas dans l'ailette, la diffusion ne se fait pas du tout, l'ailette est vraiment trop petite.

5.

5.a. Les courbes précédentes ont montré que pour $b \gg \delta$, les conditions aux limites sont $T(x=0) = T_d$ et $T(x=b) = T_a$.

Pour résoudre l'équation homogène, on écrit l'équation caractéristique: $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$. La solution de l'équation homogène est donc $T_h(x) = Ae^{+x/\delta} + Be^{-x/\delta}$.

La solution particulière est $T_p(x) = T_a$.

On a donc pour solution $T(x) = T_a + Ae^{+x/\delta} + Be^{-x/\delta}$ qui vérifie les conditions aux limites $T(x=0) = T_d$ et $T(x=b) = T_a$. Or on a $b \gg \delta$ donc le terme b/δ tend vers l'infini soit $e^{-b/\delta} \approx 0$ et $e^{+b/\delta}$ est un terme explosif qu'il faut supprimer en prenant $A = 0$. Il vient par la suite $T_a + B = T_d$ soit $B = T_d - T_a$.

La solution s'écrit donc $T(x) = T_a + (T_d - T_a)e^{-x/\delta}$.

5.b. δ représente la longueur caractéristique de variation de $T(x)$, pour une distance de l'ordre de 5δ on atteint le régime permanent. La courbe pour laquelle on atteint plus rapidement le régime permanent (courbe du dessous) correspond donc à δ plus faible soit à un coefficient de transfert plus élevé: cas où la ventilation fonctionne.

5.c. La puissance thermique est évacuée par l'ailette par conducto-convection selon la loi de Newton donnée dans l'énoncé $j_{cc}(x) = h(T(x) - T_a)$. Ainsi la puissance thermique évacuée par la portion élémentaire de l'ailette comprise entre x et $x+dx$ est $dP = j_{cc}(x)(2a+2e)dx = 2(a+e)h(T_d - T_a)e^{-x/\delta}dx$. On en déduit la puissance totale par une intégrale sur toute la longueur de l'ailette soit: $P = 2(a+e)h(T_d - T_a) \int_0^b e^{-x/\delta}dx = -2(a+e)h(T_d - T_a)\delta[e^{-x/\delta}]_0^b = -2(a+e)h(T_d - T_a)\delta(e^{-b/\delta} - 1) \approx 2(a+e)h(T_d - T_a)\delta$ car $e^{-b/\delta} \approx 0$ pour $b \gg \delta$. On néglige aussi e devant a soit $P = 2ah(T_d - T_a)\delta$.

5.d. En électricité la loi d'Ohm pour un conducteur ohmique s'écrit $U = Ri$ où $U = V_1 - V_2$ est la ddp qui met en mouvement les charges et i est le débit de charges (intensité). En thermique, $\Delta T = T_d - T_a$ est la différence de température à l'origine du transfert thermique et P est le débit de chaleur. On définit la résistance thermique par $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{P} = \frac{1}{2ah\delta} = \frac{1}{a\sqrt{2h\lambda e}}$.

La résistance thermique mesure la capacité du système à s'opposer au passage du flux thermique, la résistance thermique est donc d'autant plus petite que le matériau est bon conducteur (grande conductivité thermique) et que la convection est efficace (grand coefficient de transfert).

Pour que l'ailette dégage beaucoup d'énergie, il faut que sa résistance thermique soit faible ce qui est favorisée par un matériau très conducteur: c'est l'aluminium qui a la plus grande conductivité.

AN: $= \frac{1}{\pi a\sqrt{2h\lambda e}} : R_{th} = 1,2 \text{ K.W}^{-1}$ avec ventilation, $R_{th} = 3,8 \text{ K.W}^{-1}$ sans ventilation.

6.

6.a. $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=b)$ représente le vecteur densité de flux par diffusion en $x=b$ et $h(T(x=b) - T_a)$ représente le vecteur densité de flux par convecto-conduction. La condition aux limites exprime que le flux est continu en $x=b$, soit encore que la puissance est continue à travers la surface au bout de l'ailette en contact avec l'air.

6.b. La résistance thermique mesure la capacité du matériau à s'opposer au passage du transfert thermique. Le transfert thermique est favorisé par la convection donc la résistance thermique est plus faible en présence de convection soit quand la ventilation fonctionne. a courbe du bas correspond à la présence de ventilation.

6.c. Pour $b \gg \delta$, on a montré dans les questions précédentes que la résistance thermique ne dépend pas de b , la longueur de l'ailette. Cela est dû au fait que lorsque b est grand la température au bout de l'ailette est égale à T_a , soit la température en $x=b$ ne dépend pas de b quand b est grand. Cela explique la présence d'asymptotes horizontales, pour lesquelles la résistance thermique est constante. On lit $R_{th} \approx 1,2 \text{ SI}$ avec ventilation et $R_{th} \approx 4 \text{ SI}$ sans ventilation, on retrouve les valeurs numériques obtenues précédemment dans le cas où $b \gg \delta$.

6.d. Avec ventilation on a $\delta = 2,8 \text{ cm}$ soit $b/\delta = 1$, pour cette valeur on lit $R_{th} \approx 1,5 \text{ SI}$.

Sans ventilation on a $\delta = 8,8 \text{ cm}$ soit $b/\delta = 0,31$, pour cette valeur on lit $R_{th} \approx 12 \text{ SI}$.

La puissance thermique évacuée par une ailette s'écrit $P_1 = \frac{T_d - T_a}{R_{th}}$ avec $T_d = 50^\circ\text{C}$ car on ne veut pas que la température du processeur dépasse 50°C . Pour refroidir un processeur qui dégage une puissance $P = 200 \text{ W}$, il faut donc $N = \frac{P}{P_1} = \frac{PR_{th}}{T_d - T_a}$.

AN: sans ventilation $N = \frac{200.12}{30} = 80$

avec ventilation $N = \frac{200.1,5}{30} = 10$: la présence de la ventilation est très avantageuse.

III. Correction : problème I partie B

1. On prend un source qui éclaire un diaphragme circulaire. On place le diaphragme au foyer objet d'une lentille convergente pour que le Michelson soit éclairé par un faisceau de lumière parallèle.

2. Le Michelson est réglé au contact optique donc la différence de marche n'est lié qu'à la présence de l'ailette. On place une lame fictive d'indice $n(T_a)$ sur le bras du Michelson devant M_2 . Ainsi le rayon réfléchi

sur M_1 parcourt le chemin optique $2n(T)l$ pendant que le rayon réfléchi sur M_2 parcourt le chemin optique $2n(T_a)l$. La différence de marche est donc $\delta_{1/2} = 2n(T)l - 2n(T_a)l = 2l(1 + \frac{C}{T} - 1 - \frac{C}{T_a}) = 2lC(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_a})$.

3. Les points qui ont la même intensité sont ceux qui ont le même ordre d'interférences ou encore la même différence de marche donc les points qui sont à la même température. La température ne dépend que de z donc les points qui ont la même valeur de z sont sur une même frange. Les franges sont des droites horizontales.

4. L'ordre d'interférences s'écrit $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2lC}{\lambda}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_a})$.

L'ordre d'interférences sur la surface de l'ailette est $p_0 = p(T_0) = \frac{2lC}{\lambda}(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_a}) < 0$ car $T_0 > T_a$.

5. On fait le rapport $\frac{p}{p_0}$ soit $\frac{p}{p_0} = \frac{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_a}}{\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_a}}$ d'où $\frac{p}{p_0}(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_a}) = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_a}$ soit $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_a} + \frac{p}{p_0}(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_a}) = \frac{1}{T_a}(1 + \frac{p}{p_0}(\frac{T_a}{T_0} - 1))$.

6. Au sommet de l'interférogramme, l'ordre d'interférences est nul car l'air a pour température T_a . Et au bas de l'interférogramme l'ordre d'interférences est p_0 négatif donc quand on par du haut vers le bas l'ordre d'interférences diminue. Il est entier sur une frange brillante et demi entier sur une frange sombre. La flèche pointe vers la frange d'ordre -2 .

7. On utilise les conditions aux limites:

$$T(z=0) = T_0 = \alpha + \beta$$

$$T(z \rightarrow \infty) = T_a = \alpha$$

La loi $T(z)$ est donc $T(z) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-z/\delta}$.

8. On isole l'exponentielle dans l'expression de $T(z)$ soit $e^{-z/\delta} = \frac{T(z) - T_a}{T_0 - T_a}$ ou encore en prenant l'inverse $e^{+z/\delta} = \frac{T_0 - T_a}{T(z) - T_a}$. On a donc $\frac{z}{\delta} = \ln(\frac{T_0 - T_a}{T(z) - T_a})$. On obtient une droite de pente $\frac{1}{\delta}$ en traçant $\ln(\frac{T_0 - T_a}{T(z) - T_a})$ en fonction de z .

9. Le flux surfacique est égal au vecteur densité de flux donné par la loi de Fourier soit $j_Q(z=0) = -\lambda \frac{dT}{dz}(z=0) = -\lambda \frac{T_0 - T_a}{-\delta}$ car $\frac{dT}{dz}(z) = \frac{T_0 - T_a}{-\delta} e^{-z/\delta}$.

On écrit que le flux lié à la diffusion est égal au flux lié à la conducto convection soit $\lambda \frac{T_0 - T_a}{\delta} = h(T_0 - T_a)$ d'où $h = \frac{\lambda}{\delta}$.

10. AN: $h = 30,6$ SI en absence de ventilation

IV. Correction : problème II partie A

1. schéma

2. F est un point d'arrêt soit $v_F = 0$. On doit faire l'hypothèse que le tube de Pitot est de petite taille donc il perturbe peu l'écoulement et $v_G \approx v_\infty$.

Le fluide est parfait, en écoulement stationnaire et incompressible, il n'y a pas de pièce mobile donc on peut appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant allant jusqu'à F et celle passant par G . On néglige le poids donc le terme $\rho_\infty g z$ n'intervient pas dans l'équation.

$$P_\infty + \rho_\infty \frac{v_\infty^2}{2} = P_F + \rho_\infty \frac{v_F^2}{2} \text{ soit } P_F = P_\infty + \rho_\infty \frac{v_\infty^2}{2}$$

$$\text{et } P_\infty + \rho_\infty \frac{v_\infty^2}{2} = P_G + \rho_\infty \frac{v_G^2}{2} \text{ soit } P_G = P_\infty.$$

3. Dans le manomètre on applique la loi de la statique des fluides soit $P_H - P_I = \rho_l g h$.

4. Les pressions en F et H sont égales. De même les pressions en I et G sont égales. On a donc $P_H - P_I = P_F - P_G = \rho_l g h = \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}$. On en déduit la vitesse de l'écoulement de l'air autour de l'avion

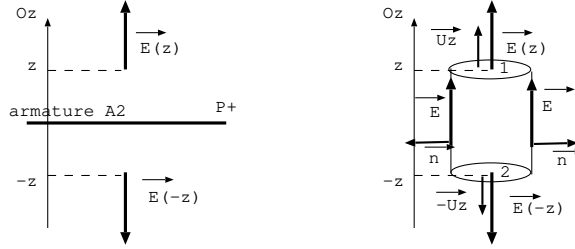
$v_\infty = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho_\infty}}$. Plus la vitesse de l'écoulement est élevée et plus la différence de niveau h est grande.

5. M appartient aux plans $(M, \vec{U}_x, \vec{U}_z)$ et $(M, \vec{U}_y, \vec{U}_z)$. Le champ électrique en M appartient à ces deux plans donc il est selon $\vec{U}_z$.

Il y a invariance par translation selon Ox et Oy car les dimensions des armatures sont grandes devant e , cela revient à dire que l'on néglige les effets de bord.

On a donc $\vec{E} = E(z)\vec{U}_z$.

De plus le plan $z = 0$ est un plan P^+ et en deux points symétriques par rapport à un plan P^+ les champs électriques sont symétriques, un schéma montre que $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.



On choisit pour surface de Gauss un cylindre de section S_g compris entre les plans $-z$ et $+z$ soit un cylindre de hauteur $2z$. Le flux du champ électrique s'écrit $\phi = \iint_1 E(+z)\vec{U}_z dS\vec{U}_z + \iint_2 E(-z)\vec{U}_z dS(-\vec{U}_z) + 0 = S_g(E(z) - E(-z)) = 2E(z)S_g$.

On applique le théorème de Gauss $\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma S_g}{\epsilon_0} = 2E(z)S_g$. On a donc $\vec{E}(z > 0) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{U}_z$ et il s'ensuit par symétrie $\vec{E}(z < 0) = \frac{+\sigma}{2\epsilon_0}\vec{U}_z$.

6. On trouve le champ électrique créé par le condensateur en appliquant le théorème de superposition, c'est la somme du champ électrique créé par l'armature A_2 au dessus de celle-ci soit $\vec{E}_2(z > 0) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{U}_z$ et du champ créé par l'armature A_1 en dessous de celle-ci soit $\vec{E}_1(z < e) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{U}_z$. Le champ électrique total est donc $\vec{E}(0 < z < e) = \frac{-\sigma}{\epsilon_0}\vec{U}_z$.

7. La capacité d'un condensateur est définie par $C = \frac{Q}{U}$ soit ici $Q = \frac{\sigma S}{V_{A_1} - V_{A_2}}$. On déduit la différence de potentiel du champ électrique $V_{A_1} - V_{A_2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_e^0 \frac{-\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$.

On en déduit $C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma e}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$.

8. Les condensateurs présentés ne sont pas des condensateurs plans mais les lignes de champ vont d'une armature à l'autre donc l'énoncé laisse supposer que l'on néglige aussi les effets de bord et que la capacité a la même expression. En présence de givre ϵ_0 est multiplié par $\epsilon_r = 80$ donc la capacité augmente, donc elle sera d'autant plus grande que l'épaisseur de givre sera grande. La réponse est linéaire (soit C proportionnel à l'épaisseur de givre) pour des épaisseurs pas trop importantes donc la mesure de C permet de mesurer l'épaisseur de givre.

V. Correction : problème I partie B

1. On a $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) + \delta m_e \vec{v}_e$.

2. On a $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s$.

3. On en déduit la variation de quantité de mouvement du système fermé Σ^* soit $d\vec{p}^* = \vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t) = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) + \delta m_s \vec{v}_s - \delta m_e \vec{v}_e$.

En régime stationnaire $\vec{p}(t) = \vec{p}(t + dt)$. De plus la masse entrante est égale à la masse sortante entre t et $t + dt$, on a $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$.

On a donc $\frac{dp^*}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$.

4. Le système fermé Σ^* subit:

- son poids (négligé)

- les forces de pression à l'entrée et à la sortie $+P_0 S_e \vec{e}_x - P_0 S_s \vec{e}_x$ (je note $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire dans la direction de la vitesse de l'air)

- l'action du moteur sur le fluide $\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}}$: cette force comprend l'action des parois et l'action de la turbine.

5. On applique le théorème de la quantité de mouvement au système fermé Σ^* soit $\frac{dp^*}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = +P_0 S_e \vec{e}_x - P_0 S_s \vec{e}_x + \vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}}$. Pour négliger le terme de pression il faut supposer que $S_e \approx S_s$ ou que les forces de pression sont de norme très faible par rapport à la force exercée par l'avion sur l'air.

6. D'après la seconde loi de Newton on a $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{avion}} = -\vec{F}_{\text{avion} \rightarrow \text{air}} = D_m(\vec{v}_e - \vec{v}_s)$.

Il est important de noter que la vitesse de l'écoulement de l'air est opposée à la vitesse de l'avion par rapport à l'air. Ainsi la force de propulsion de l'air sur l'avion doit être de sens opposé aux vitesses de l'écoulement, il faut donc avoir $v_e < v_s$.

7. On applique le premier principe industriel au diffuseur, soit entre les états 1 et 2. Le diffuseur est adiabatique donc $q_{12} = 0$ et dans le diffuseur il n'y a pas de pièce mobile donc $w_{u,12} = 0$ d'où $\Delta h_{12} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0$ (on néglige le poids et $v_2 \approx 0$ d'après l'énoncé puisqu'on néglige l'énergie cinétique à l'entrée

du compresseur) soit $c_p(T_2 - T_1) + \frac{0 - v_A^2}{2} = 0$ donc $T_2 = T_1 + \frac{v_A^2}{2c_p} = 264 \text{ K}$.

8. Dans le diffuseur la transformation est adiabatique et réversible, l'air est assimilé à un GP, on applique les lois de Laplace: $P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$ on a donc $P_2 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 55,9 \text{ kPa}$.

9. On applique le premier principe industriel au compresseur adiabatique soit $q_{23} = 0$ en négligeant le poids et les énergies cinétiques d'où $\Delta h_{23} = c_p(T_3 - T_2) = w_{u,23}$. On en déduit la puissance utile du compresseur $P_{23} = w_{u,23} D_m = 10,7 \text{ MW}$.

10. Dans la turbine la transformation est adiabatique réversible l'application du principe industriel donne $\Delta h_{45} = c_p(T_5 - T_4) = w_{u,45} < 0$: ce travail est entièrement reçu par le compresseur soit $w_{u,45} = -w_{u,23}$ d'où $\Delta h_{45} = \Delta h_{23}$ soit $T_5 - T_4 = T_3 - T_2$ et $T_5 = T_4 + T_3 - T_2 = 1,18.10^3 \text{ K}$.

On applique les lois de Laplace dans la turbine pour la transformation adiabatique réversible du GP soit $P_4^{1-\gamma} T_4^\gamma = P_5^{1-\gamma} T_5^\gamma$ on a donc $P_5 = P_4 \left(\frac{T_4}{T_5}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} = 2,9.10^5 \text{ Pa}$.

11. Dans la tuyère, la transformation est adiabatique et il n'y a pas de pièce mobile d'où $w_{u,56} = q_{56} = 0$ soit d'après le premier principe industriel $c_p(T_6 - T_5) + \frac{v_s^2 - 0}{2} = 0$ donc $v_s = \sqrt{2c_p(T_5 - T_6)} = 1,03.10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

12. La puissance de la force propulsive est $P_{\text{propulsion}} = \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{avion}} \cdot \vec{v}_{\text{avion}} = D_m(\vec{v}_e - \vec{v}_s) \cdot \vec{v}_A$ avec $\vec{v}_e = -\vec{v}_A$ (la vitesse de l'air par rapport à l'avion est l'opposée de la vitesse de l'avion par rapport à l'air). Notons que $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_s$ sont de sens contraire d'où $P_{\text{propulsion}} = D_m(v_s - v_A)v_A = 9,24 \text{ MW}$.

13. Le rendement est défini comme la puissance valorisée sur la puissance coûteuse soit $\eta = \frac{P_{\text{prop}}}{P_{\text{chamb}}} = 0,20$.

On applique le premier principe au fluide sur un cycle: $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$

On applique le second principe au fluide sur un cycle réversible soit $S_e = 0$: $\Delta S = 0 = S_e + S_c = 0 + \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$

Le rendement du moteur est défini par $r = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,8$: c'est le rendement maximal que l'on peut obtenir donc le rendement réel est obligatoirement plus faible.

14. On applique les lois de Laplace entre l'entrée et la section en x soit $P_e V_e^\gamma = P(x) V(x)^\gamma$ or le volume V et la masse volumique sont inversement proportionnels ($\rho = \frac{m}{V}$ avec m constante) on a donc $P_e \rho_e^{-\gamma} = P(x) \rho(x)^{-\gamma}$ soit $\rho(x) = \rho_e \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma}$.

15. $c_p T$ désigne une enthalpie massique soit une énergie massique. Une énergie massique est homogène à $\frac{E_c}{m} = \frac{v^2}{2}$ donc $c_p T$ est homogène au carré d'une vitesse.

16. Le débit massique sur la section en x s'écrit $D_m = \rho(x)Sv(x)$. On remplace $\rho(x)$ et $v(x)$ par leurs expres-

sions soit $D_m = \rho_e \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma} S(x) \sqrt{v_e^2 + v_m^2 \left(1 - \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{\gamma-1/\gamma}\right)} = \rho_e v_e S(x) \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma} \sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v_e^2} \left(1 - \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{\gamma-1/\gamma}\right)}$.

Par identification avec l'énoncé on a $G(x) = \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{1/\gamma} \sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v_e^2} \left(1 - \left(\frac{P(x)}{P_e}\right)^{\gamma-1/\gamma}\right)}$.

17. En entrée de la tuyère on a $P(x=0) = P_e$ soit $\alpha = 1$ et $G(1) = \frac{v_e}{v_m}$. Ensuite en progressant dans la tuyère la pression du fluide va diminuer (le gaz subit une détente) donc α diminue et comme on peut le lire sur le graphe $G(x)$ augmente.

Or le débit massique est constant pour un écoulement stationnaire donc quand la fonction $G(x)$ augmente, la fonction $S(x)$ doit diminuer : ce qui signifie que la tuyère doit être convergente.

18. Une tuyère toujours convergente signifie que la section ne fait que diminuer donc par conservation du débit massique la fonction $G(x)$ ne fait qu'augmenter. Elle atteint sa valeur maximale pour $\alpha = \alpha_c = \left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ et on lit $G(\alpha_c) = \frac{v_e}{v_m} + 5$.

On en déduit la vitesse limite de l'expression de $v(x)$ donnée dans l'énoncé: $v_{max} = \sqrt{v_e^2 + v_m^2 \left(1 - \alpha_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$.

On peut négliger v_e et remplacer α_c par son expression donc $v_{lim} = \sqrt{v_m^2 \left(1 - \frac{2}{1+\gamma}\right)} = v_m \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$.

19. On applique la conservation du débit massique entre l'entrée de la tuyère où $S = S_e$ et $v(x=0) = v_e$ et l'endroit où la section est minimale et $\alpha = \alpha_c$ et $G(\alpha_c) \approx 5,2$. On a donc $\rho_e S_e v_e = \rho_e v_m S_{col} G(\alpha_c) = \rho_e v_m C_{col} 5,2$ soit $\frac{S_{col}}{S_e} = \frac{v_e}{5,2 v_m} \approx 0,02$ (avec $v_e = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_m = 1000 \text{ m.s}^{-1}$).

20. Dans une tuyère convergente la sortie de la tuyère se situe pour $\alpha = \alpha_c$, c'est là où la vitesse des gaz est la plus élevée. On a donc $\alpha_c = \frac{P_s}{P_e} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ soit $P_e = P_{atm} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 64,3 \text{ kPa}$.

21. Pour un avion supersonique, on veut dépasser la vitesse du son, pour cela, il faut donc pouvoir atteindre des valeurs de α plus faible que α_c . Or d'après la courbe, pour $\alpha < \alpha_c$, la fonction $G(\alpha)$ diminue quand α diminue c'est-à-dire quand le gaz progresse dans la tuyère en se détendant. Ainsi par conservation du débit massique, G diminue impose que la section doit augmenter. Il faut donc une tuyère convergente jusqu'à ce que le gaz atteigne la vitesse du son puis diverge une fois que cette vitesse est atteinte.