I. Correction: thermique d'une plaque de combustible nucléaire

A.1.1- La puissance thermique produite par le combustible est égale à la puissance thermique volumique multipliée par le volume de la plaque soit $P_{th} = \phi_v 2eHl = 150\ kW$. Attention de convertir ϕ_v en $W.m^{-3}$ car elle est donnée en $W.cm^{-3}$ soit $\phi_v = 500.10^6\ W.m^{-3}$.

A.1.2- On utilise l'équation de diffusion thermique en régime stationnaire soit pour $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ avec $\Delta T(x) = \dfrac{d^2T}{dx^2}$. On doit donc résoudre l'équation $\Delta T(x) = \dfrac{d^2T}{dx^2} = -\dfrac{\phi_v}{\lambda}$ soit après une première intégration par rapport à x on a $\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{\phi_v x}{\lambda} + A$ et après une deuxième intégration par rapport à x on a $T(x) = -\dfrac{\phi_v x^2}{2\lambda} + Ax + B$.

On trouve A et B avec les conditions aux limites soit $T(x = -e) = T_1 = -\dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda} - Ae + B$ et $T(x = e) = T_2 = -\dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda} + Ae + B$.

On fait la somme des équations: $T_1 + T_2 = -\dfrac{\phi_v e^2}{\lambda} + 2B$ soit $B = \dfrac{T_1 + T_2}{2} + \dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda}$.

On soustrait les deux équations: $T_2 - T_1 = 2Ae$ soit $A = \dfrac{T_2 - T_1}{2e}$.

On a donc $T(x) = -\dfrac{\phi_v(x^2 - e^2)}{2\lambda} + \dfrac{(T_2 - T_1)x}{2e} + \dfrac{T_1 + T_2}{2}$.

La température est maximale pour $\dfrac{dT}{dx} = 0 = -\dfrac{\phi_v x}{\lambda} + A = -\dfrac{\phi_v x}{\lambda} + \dfrac{T_2 - T_1}{2e}$ soit pour $x_{max} = \dfrac{\lambda(T_2 - T_1)}{2e\phi_v}$.

A.1.3- Pour $T_1 = T_2 = 540\ K$, on a $x_{max} = 0$ (c'est normal car la courbe $T(x)$ a pour axe de symétrie $x = 0$ puisque $T(x = +e) = T(x = -e)$). On en déduit $T_{max} = T(x_{max}) = +\dfrac{\phi_v e^2}{2\lambda} + \dfrac{T_1 + T_2}{2} = 814\ K$.

A.1.4- Pour $T_1 = 580\ K$ et $T_2 = 540\ K$, on a $x_{max} = -73\ \mu K < 0$ (x_{max} est du côté de la température la plus élevée). Les fluides sont là pour refroidir les bords de la plaque. Ainsi les fluides arrivent en haut de la plaque avec une température plus élevée que leur température en bas de la plaque, puisqu'ils ont reçu du transfert thermique de la part de la plaque de combustible.

Le fluide 1 reçoit plus de transfert thermique que le fluide 2 puisqu'il atteint une température plus élevée, on peut en déduire que la vitesse d'écoulement du fluide 2 est plus grande que la vitesse du fluide 1, le fluide 2 va plus vite et donc il reste moins longtemps en contact avec la plaque et se réchauffe moins bien que le fluide 1.

A.2.1- En régime permanent sans production d'énergie dans le solide, l'équation de diffusion s'écrit $\Delta T = 0$ soit pour $T = T(x)$, on doit résoudre l'équation $\Delta T(x) = \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$ soit après une première intégration par rapport à x on a $\dfrac{dT}{dx} = C1$ et après une deuxième intégration par rapport à x on a $T(x) = C1x + C2$: la température est donc une fonction affine de x: le profil 3 ne peut pas convenir.

L'énoncé nous dit qu'il n'y a pas de résistance thermique entre les deux solides, cela implique que la température est continue en $x = e_1$: le profil 4 ne peut pas convenir.

La loi de Fourier s'écrit $\overrightarrow{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \dfrac{dT}{dx}\overrightarrow{e_x}$. On a donc $j_D = -\dfrac{dT}{dx}$ où $\dfrac{dT}{dx}$ représente la pente de la tangente à la courbe $T(x)$, ici la courbe $T(x)$ est une droite donc $\dfrac{dT}{dx}$ est la pente de la droite.

Le vecteur densité de courant thermique est continu, il a donc le même sens dans les solides A et B: le profil 2 ne peut pas convenir car $j_D < 0$ pour $x < e_1$ et $j_D > 0$ pour $x > e_1$ (j_D est orienté des fortes vers les faibles températures).

On en déduit que le profil 1 convient.

On a $j_D(x < e_1) = -\lambda_A \dfrac{T_1 - T_0}{e_1}$ et $j_D(x > e_1) = -\lambda_B \dfrac{T_2 - T_1}{e_2}$. Le vecteur densité de courant est le même dans les deux solides donc $-\lambda_A \dfrac{T_1 - T_0}{e_1} = -\lambda_B \dfrac{T_2 - T_1}{e_2}$.

Après calcul on trouve $T_1 = \dfrac{\frac{\lambda_B T_2}{e_2} + \frac{\lambda_A T_1}{e_1}}{\frac{\lambda_B}{e_2} + \lambda_A e_1}$.