Théorème du moment cinétique par rapport à un point

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un point matériel M qui tourne autour d'un point O (en tournant il peut décrire un cercle, une ellipse,...). Dans ce cas, la RFD est toujours valable pour étudier le mouvement de ce point mais elle n'est pas toujours adaptée pour trouver l'équation du mouvement. Il existe un autre théorème appelé théorème du moment cinétique qui permet de trouver plus aisément l'équation du mouvement. Ce théorème n'est pas une nouvelle loi de la mécanique, il se démontre à partir de la RFD, il n'apporte pas d'informations supplémentaires, il est juste plus pratique.

I. **Outils mathématiques**

Comment trouver graphiquement le produit vectoriel de vecteurs?

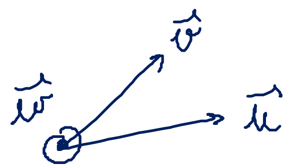
$\vec{w}$ est un vecteur ⊥ à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

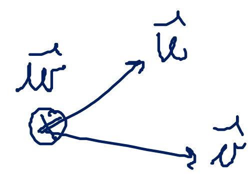
On cherche le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{W}$

$\vec{u}$ dirigé selon le pouce de la main droite

$\vec{v}$ dirigé selon l'index 〃

$\vec{w}$ dirigé selon le majeur 〃





Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires: $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

Comment calculer le produit vectoriel de deux vecteurs?

Dans la base polaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$:

$$\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta} = \vec{e_z}\wedge\vec{e_r} = \vec{e_\theta}\wedge\vec{e_z} = \vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta}$$

$\xrightarrow{\oplus}$ $\xleftarrow[\ominus]{}$

$\vec{e_r}\wedge\vec{e_z} = -\vec{e_\theta}$, $\vec{e_\theta}\wedge\vec{e_z} = +\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}\wedge\vec{e_r} = -\vec{e_z}$

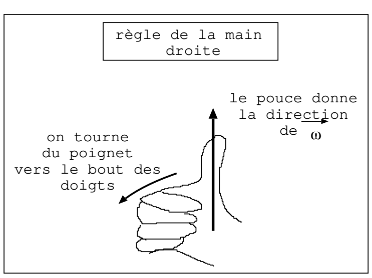
Comment trouver le sens d'un vecteur rotation?

Quand un point matériel décrit un cercle, pour décrire son mouvement de rotation, on utilise un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

dont la norme est $\omega = \dot{\theta}$ en $rad.s^{-1}$

dont la direction est ⊥ au plan du cercle

dont le sens est donné par la règle de la main droite



II. **Moment cinétique d'un point matériel**

Définition: le moment cinétique d'un point matériel M de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ par rapport à O s'écrit:

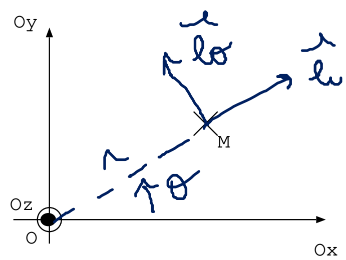
$$\boxed{\vec{L}_O(M)/_R = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M)_R = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_R}$$ ♡

c'est un vecteur ⊥ à $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)_R$ (pour un mvt plan c'est un vecteur ⊥ au plan du mvt)

Son unité: $m^2.kg.s^{-1}$

Le moment cinétique dépend du référentiel d'étude.

Son expression en coordonnées polaires:



$\vec{OM} = r\vec{e_r}$

$\vec{v}(M)_R = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{L}_O(M)_R = r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

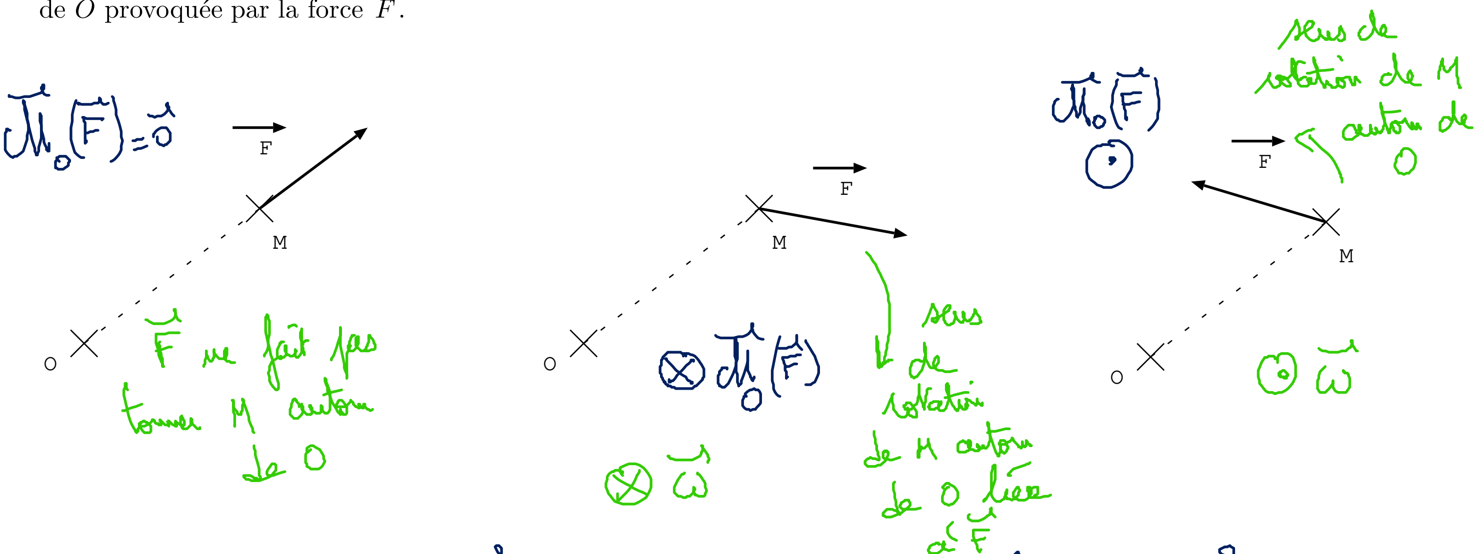
III. **Le moment d'une force**

Définition: le moment de la force $\vec{F}$ exercée sur M et calculé par rapport à O s'écrit:

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}}$$ ♡

Son unité: $N\,m = kg\,m\,s^{-2}\,m = kg\,m^2 s^{-2}$

Sens physique du moment d'une force: dans les exemples suivants, représenter le moment de la force $\vec{F}$ exercée sur M et calculé par rapport à O, ainsi que le vecteur rotation associée à la rotation de M autour de O provoquée par la force $\vec{F}$.



Le moment d'une force $\vec{F}$ exercée sur M / à O est colinéaire de même sens au vecteur rotation provoquée par $\vec{F}$ sur M autour de O.
Le moment mesure la capacité de $\vec{F}$ à faire tourner M autour de O.

Expression du moment d'une force par la méthode du bras de levier: on cherche à calculer $\vec{M}_O(\vec{F})$:

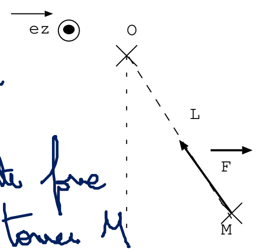
$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = ||\vec{F}|| d\vec{u}}$$

où $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire dans le sens et la direction de la rotation de M autour de O provoquée par la force $\vec{F}$

où d désigne le bras de levier (le bras de levier est une distance). On trace la droite d'action de la force (droite passant par M et $\vec{F}$), le bras de levier est la plus courte distance entre cette droite et le point O.

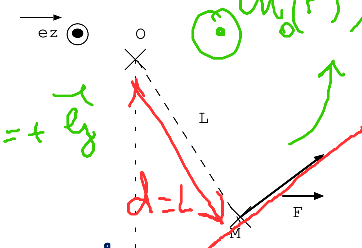
$\vec{OM}$ colinéaire à $\vec{F}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ cette force ne peut pas faire tourner M autour de O



$\odot$ $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sens de rotation de M liée à $\vec{F}$

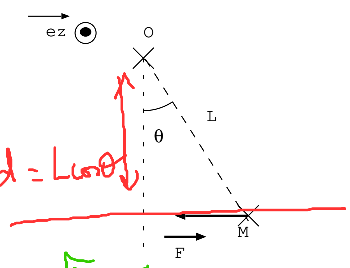
$\vec{u} = +\vec{e_z}$



$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \|\vec{F}\| L \vec{e_z}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ $\otimes$

$\vec{u} = -\vec{e_z}$



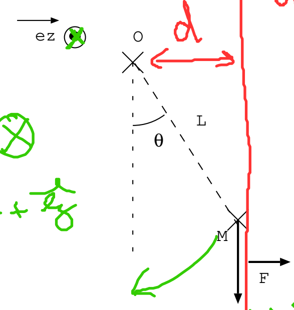
sens de rotation de M liée à $\vec{F}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \|\vec{F}\| L\cos\theta\,(-\vec{e_z})$

$d = L\sin\theta$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ $\otimes$

$\vec{u} = +\vec{e_z}$



sens de rotation de M liée à $\vec{F}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \|\vec{F}\| L\sin\theta\,\vec{e_z}$

Cas particulier: pour des forces qui dépendent de la vitesse ou de la position, il peut être plus simple de calculer le moment de la force avec le produit vectoriel dans le système de coordonnées de l'étude.

Exemple: soit un pendule simple de longueur l et de masse m soumis à la force de frottements fluide $\vec{F} = -mh\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$.

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM}\wedge\vec{F} = l\,\vec{e_r}\wedge(-mh\,l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}) = -mhl^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$$

IV. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe de $\mathcal{R}$

Démonstration: O point fixe de R

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}\wedge m\vec{v}(M/R)\right) = \underbrace{\cancel{\underbrace{\frac{d\vec{OM}}{dt}}_{\vec{v}(M/R)}\wedge m\vec{v}(M/R)}}_{=\vec{0}} + \vec{OM}\wedge \underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}(M)_R}_{=\vec{F} \text{ d'après la RFD}} = \vec{OM}\wedge\vec{F}$$

Enoncé: la dérivée temporelle du moment cinétique de M / à O dans R est égale à la somme des moments des forces exercées sur M et calculés par rapport à O. :

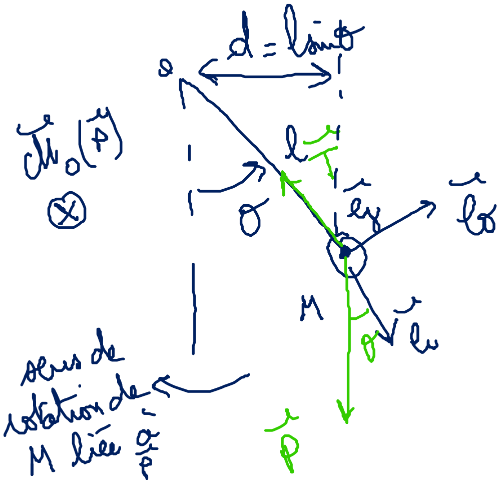
$$\boxed{\left.\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}\right)_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})}$$

Moyen mnémotechnique

RFD: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$

TMC: $\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\vec{OM} \wedge m\vec{v}}_{\vec{L}_O(M)/R}\Big) = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})}$

V. **Application: le pendule simple**



R galiléen

Système : M qui subit : son poids $\vec{P}$

la tension du fil $\vec{T}$

TMC: $\left.\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$

$$\vec{L}_O(M)_R = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_R = l\vec{e_r} \wedge m l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = m l^2 \dot{\theta}\,\vec{e_z}$$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$ car $\vec{T}$ ne peut pas faire tourner M autour de O

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = mg \times l\sin\theta\,(-\vec{e_z})$

d'où $m l^2 \ddot{\theta} = -mg\, l \sin\theta$

d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$