

Partie VI - Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la **figure 7**.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (**figure 7**) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

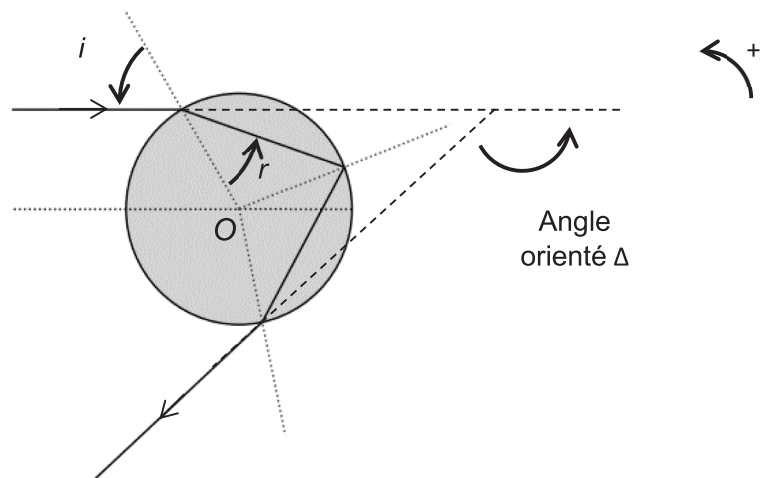


Figure 7 - Cas d'une réflexion et de deux réfractions

Q23. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

Q24. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (**figure 7**).

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.

Q25. Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Donnée : $\frac{d}{du} \text{Arcsin}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}.$

Q26. Justifier à l'aide de la **figure 8** qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

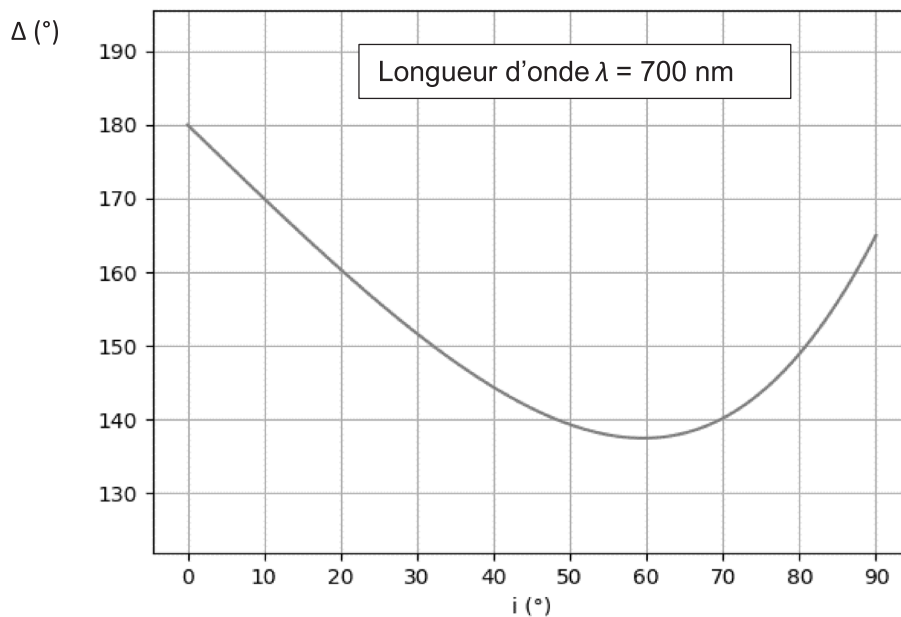


Figure 8 - Déviation en fonction de l'angle d'incidence

- Q27.** Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400 \text{ nm}$, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700 \text{ nm}$, $n = 1,330$).
- Q28.** Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

Partie VII - Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel

- Q29.** Cette question a pour but de rappeler certaines conditions d'observation des interférences lumineuses.

Deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2 .

Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice n et interfèrent en un point P après avoir parcouru les distances $x_1 = S_1P$ et $x_2 = S_2P$. On modélise les amplitudes des ondes en P par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$

$$s_2(P, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec $k_i = n \frac{\omega_i}{c}$ ($i = 1, 2$), a_1 , a_2 , φ_1 , φ_2 constantes.

c est la célérité de la lumière dans le vide.

- a)** Donner un ordre de grandeur de ω_1 et ω_2 pour la lumière visible.

b) L'intensité lumineuse $I(P)$ observée à l'œil nu en P est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en P , soit : $I(P) = K \left\langle s^2(P, t) \right\rangle_\tau$. Sur quelle durée τ cette valeur moyenne est-elle calculée ?

c) Calculer l'intensité $I(P)$ et montrer qu'elle s'écrit : $I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$.

À quelle(s) condition(s) le terme $I_{12}(P)$ est-il non nul ?

Donnée : $\cos(a)\cos(b) = 1/2 [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

d) On suppose dans la suite que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $\varphi_1 = \varphi_2$.

Montrer que l'intensité en P s'écrit $I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(P)\right)$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. La grandeur $\delta(P)$ sera exprimée en fonction de l'indice n du milieu, de x_1 et de x_2 .

Il est possible (**photo 5**) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits "surnuméraires".

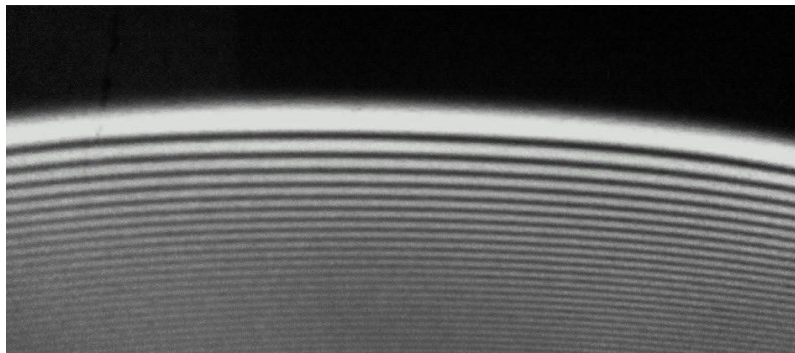


Photo 5 - Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau

Q30. Représenter la courbe $I(P)$ en fonction de $\delta(P)$. En observant la **photo 5**, que peut-on dire de I_1 et I_2 ?

On considère (**figure 9**) deux rayons d'incidences i_1 et i_2 , voisins du rayon d'incidence i_m (en pointillés) sur une goutte d'eau, se réfléchissant une seule fois à l'intérieur de la goutte d'eau et émergeant dans des directions parallèles.

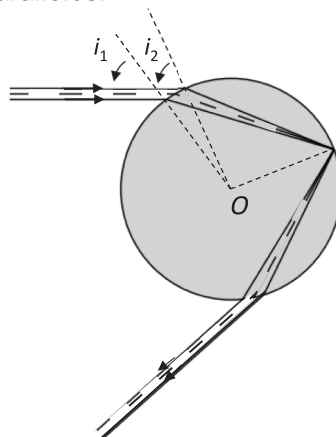


Figure 9 - Rayons responsables des interférences

Q31. Où ces rayons interfèrent-ils ?

Q32. On admet que la différence de marche en un point P du champ d'interférences s'écrit :

$$\delta(P) = D(\cos(i_2) - \cos(i_1)) - 2Dn(\cos(r_2) - \cos(r_1)).$$

Exprimer la condition permettant d'observer des interférences constructives. L'écart angulaire entre les franges est-il plus grand pour les petites ou les grosses gouttes ? Justifier qualitativement.

Q33. Les rayons incidents d'angles d'incidence $i_1 = 50,13^\circ$ et $i_2 = 67,98^\circ$ donnent pour une radiation rouge ($\lambda = 700 \text{ nm}$, $n = 1,330$) des rayons émergents parallèles.

Quel diamètre de goutte permettra d'observer la frange claire d'ordre -2 dans la direction des rayons émergents ?