Mission prolongée pour la sonde Juno

Introduction

Jupiter est la planète la plus volumineuse du système solaire et fait partie des planètes « géantes gazeuses ». Compte tenu du rôle central de la planète géante dans la formation du système solaire, celle-ci intrigue toujours les scientifiques puisque de nombreuses questions concernant sa formation restent sans réponse. En particulier, deux scénarios s'affrontent sur la manière dont la planète Jupiter s'est constituée :

- **premier scénario :** la planète s'est formée en deux temps - accrétion [1] des matériaux situés dans son voisinage jusqu'à former un noyau solide représentant une dizaine de masses terrestres puis effondrement gravitationnel de la masse de gaz et de poussière entourant la planète ;
- **second scénario :** celui-ci repose sur le seul effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières mais nécessite la présence d'une nébuleuse originelle de plus grande taille que celle retenue dans les scénarios de formation du système solaire.

La sonde Juno a pour objectif principal de résoudre ce dilemme en collectant des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution.

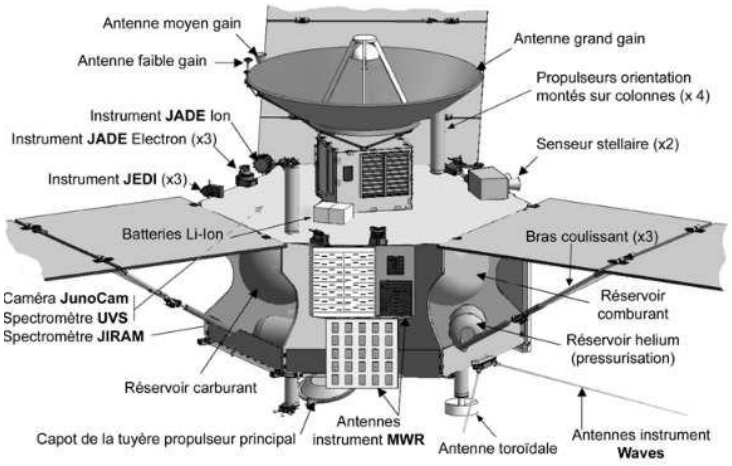

Figure 1 – Présentation de la sonde Juno - D'après Wikipedia

Partie I - Les caractéristiques de Jupiter

I.1 - Observer Jupiter depuis la Terre

C'est en janvier 1610, à l'aide d'une très modeste lunette astronomique, que Galilée se rendit compte de la présence de quatre points lumineux à proximité de la planète géante. En notant soigneusement leurs positions, plusieurs soirs de suite, il s'aperçut que ces quatre points étaient mobiles et comprit qu'ils tournaient autour de la planète. Galilée venait de découvrir les quatre satellites principaux de Jupiter.

1. processus d'agglomération

Le **tableau 1** regroupe certaines données concernant ces satellites dont les orbites sont quasi circulaires :

Satellite	Distance moyenne au centre de Jupiter	Période de révolution sidérale
Io	$4,218 \cdot 10^5$ km	1,769 jour
Europe	$6,714 \cdot 10^5$ km	3,551 jours
Ganymède	$1,070 \cdot 10^6$ km	7,155 jours
Callisto	$1,883 \cdot 10^6$ km	16,689 jours

Tableau 1 – Données concernant les principaux satellites de Jupiter

Q1. Énoncer la troisième loi de Kepler, puis estimer la masse de Jupiter en précisant la méthode utilisée. Comparer cette valeur à celle fournie en fin de sujet.

Q2. Calculer la masse volumique moyenne de cette planète.

Pour un observateur terrestre, Jupiter est vue sous un angle α qui varie suivant la distance Terre-Jupiter. Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles ayant pour centre le Soleil, contenus dans un même plan, de rayons respectifs d_T et d_J et décrits dans le même sens. La planète Jupiter est modélisée en première approximation par une sphère de rayon R_J.

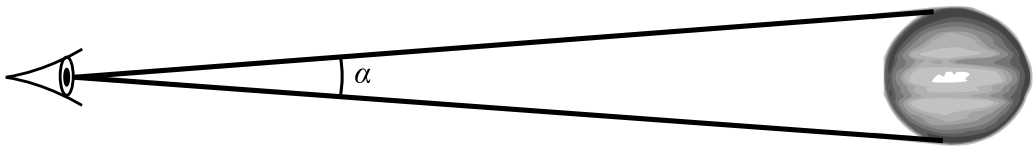

Figure 2 – Définition de l'angle α

Q3. Calculer l'angle maximal $\alpha_{\max}$ (en radians) sous lequel Jupiter est vue depuis la Terre.

Q4. Cette situation est la plus favorable à l'observation et porte le nom d'**opposition de Jupiter**. À l'aide des données fournies, évaluer la période de révolution sidérale T_J de Jupiter ainsi que la durée s'écoulant entre deux oppositions de celle-ci.

Une lunette astronomique est un système optique centré constitué d'un objectif et d'un oculaire. L'objectif est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique O_1, de distance focale $f_1' = 100$ cm et de diamètre D_1. L'oculaire est une lentille mince convergente de centre optique O_2, de distance focale $f_2' = 10$ cm et de diamètre D_2.

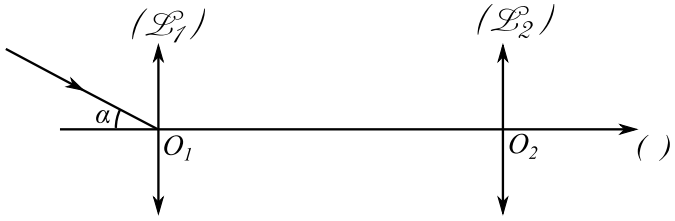

Figure 3 – Lunette astronomique

L'objectif donne d'un objet éloigné une image réelle appelée image objective. Cette dernière est observée au moyen de l'oculaire.

Q5. À quelle condition l'œil d'un observateur, supposé sans défaut, n'accommode-t-il pas (ne se fatigue pas) ? En déduire la position relative de l'objectif et de l'oculaire dans ce cas de figure. Ce système optique possède-t-il des foyers ? Comment se nomme un tel système optique ?

Q6. Rappeler les conditions de Gauss. Reproduire la **figure 3**, sans respecter les échelles, et compléter la marche du rayon incident d'angle α avec l'axe optique en faisant clairement apparaître les traits de construction. Indiquer l'angle α' sous lequel est vue la planète à travers l'instrument sous ces mêmes conditions.

Q7. Déterminer le grossissement de la lunette $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ en fonction de f_1' et de f_2' et calculer celui-ci. Jupiter pourra-t-elle être discernée correctement avec une telle lunette ?

I.2 - La trajectoire de la sonde Juno

S'échapper de la Terre

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le " lancer " vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_ℓ est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il " s'échappe ".

Q8. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini), déterminer la vitesse de libération v_ℓ en tenant compte de l'accélération de la pesanteur g supposée constante à la surface de la Terre. Calculer numériquement v_ℓ.

Caractéristiques de la trajectoire

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une **orbite elliptique** de 53 jours.

On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse m soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse M_J. En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$.

Q9. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ? Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique.

Q10. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_{O,P/\mathscr{R}}} = \overrightarrow{r} \wedge m\,\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$ est constant au cours du temps. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la **figure 4**.

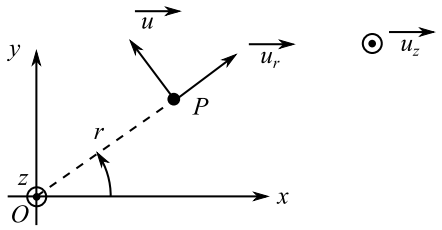

Figure 4 – Paramétrage cylindrique

Q11. Déterminer les expressions du vecteur position $\overrightarrow{r}$ et du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{P/\mathscr{R}}}$ dans la base polaire $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$.

Q12. On définit le vecteur $\overrightarrow{C}$ par $\overrightarrow{C} = \dfrac{\overrightarrow{L_{O,P/\mathscr{R}}}}{m}$. En exprimant $\overrightarrow{C}$ dans la base cylindrique orthonormée directe $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$, montrer que $r^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de $C = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{u_z}$.

Q13. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathscr{E}_{m,P/\mathscr{R}} = \mathscr{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathscr{G}\frac{mM_J}{r}. \tag{1}$$

Justifier que $\mathscr{E}_m$ se conserve.

Q14. Tracer l'allure de $U_{\text{eff}}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de $\mathscr{E}_m$. On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

Q15. En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la sonde. Exprimer, sans justifier, $\mathscr{E}_m$ en fonction de a. En déduire une première équation liant la distance minimale $r_{\min}$, la distance maximale $r_{\max}$ et a. Montrer également que $r_{\min}$ et $r_{\max}$ vérifient la relation suivante :

$$r_{\min} r_{\max} = -\frac{mC^2}{2\mathscr{E}_m}. \tag{2}$$

Ces deux relations permettent de déterminer $r_{\min}$ et $r_{\max}$, ce que l'on ne demande pas.

I.3 - La structure interne de Jupiter

Électrostatique et gravitation universelle

On notera dans toute la suite $\mathscr{G}$ la constante de la gravitation universelle dont la valeur numérique est fournie en fin de sujet. On s'intéresse maintenant au champ gravitationnel $\overrightarrow{G(P)}$ créé en P par une distribution de masse.

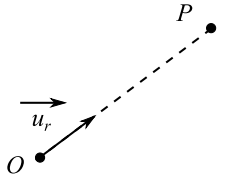

Figure 5 – Paramétrage

Une distribution de masse volumique ϱ crée un champ gravitationnel $\overrightarrow{G}$ (supposé stationnaire) qui satisfait les équations locales suivantes :

$$\text{div}\,\overrightarrow{G} = -4\pi\mathcal{G}\varrho \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\textbf{rot}}\,\overrightarrow{G} = \overrightarrow{0}\,. \tag{3}$$

Q16. Comment s'exprime la force de gravitation exercée par une distribution de masse sur un point matériel P de masse m en fonction du champ de gravitation $\overrightarrow{G(P)}$?

Q17. Dresser une analogie entre les **équations (3)** et celles de l'électrostatique. Quelle est la différence fondamentale entre l'électrostatique et la gravitation ?

Q18. Le potentiel gravitationnel Φ est pour $\overrightarrow{G}$ l'analogue de ce qu'est le potentiel électrostatique V pour le champ électrostatique. Laquelle des deux équations précédentes (3) permet d'assurer l'existence d'un potentiel gravitationnel Φ pour le champ de gravitation $\overrightarrow{G}$? Écrire l'équation existant entre Φ et $\overrightarrow{G}$, au signe près. En déduire que le potentiel gravitationnel satisfait l'équation de Poisson et préciser alors le choix du signe effectué :

$$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\varrho\,. \tag{4}$$

Q19. Énoncer le théorème de Gauss liant le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ à la distribution volumique de charge ϱ. En s'appuyant sur l'analogie établie entre l'électrostatique et la gravitation, montrer que le champ gravitationnel $\overrightarrow{G}$ créé par une distribution de masse volumique ϱ satisfait la **relation 5**, M_{int} étant la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ,

$$\iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{G(M)}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S_M} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}\,. \tag{5}$$

Distribution sphérique de masse non homogène

En étudiant les variations du champ de gravitation de Jupiter, la sonde Juno fournira des indications sur la distribution des masses à l'intérieur de la planète, l'incidence sur celle-ci du déplacement de son atmosphère et du mouvement de marée généré par ses lunes.

De manière générale, les planètes géantes possèdent :
- un noyau d'éléments lourds ;
- une enveloppe d'hydrogène et d'hélium ;
- au-delà d'une pression donnée, l'hydrogène devient métallique.

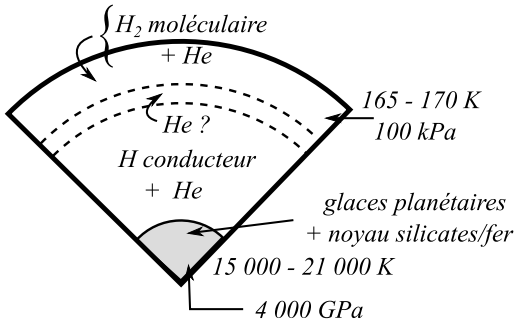

Figure 6 – Structure interne de Jupiter - (J. Heyvaerts - Astrophysique)

On étudie ici quelques propriétés du champ de gravitation d'une distribution sphérique de masse non-homogène de rayon R. On associe un système de coordonnées sphériques à cette distribution dont le centre O est à l'origine du système. On notera $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi}\right)$ la base de vecteurs associée.

On suppose que la masse volumique $\varrho(r)$ ne dépend que de la coordonnée radiale r.

Q20. Justifier très précisément que le champ de gravitation est nécessairement de la forme $\overrightarrow{G(M)} = -G(r)\,\overrightarrow{u_r}$, où $G(r)$ est la norme du champ de gravitation.

Q21. On note $M(r)$ la masse contenue dans la boule de rayon r. Montrer alors que :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\, r'^2 \varrho(r')\,\mathrm{d}r'. \tag{6}$$

Q22. En utilisant le théorème de Gauss pour la gravitation, déterminer dans le cas de ce modèle $G(r)$ pour $r > R$. On rappelle que M_J est la masse de Jupiter que l'on définira à l'aide de $M(r)$. Tracer le graphe de $r \longmapsto G(r)$ pour $r > R$. Donner l'expression du potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ dont dérive le champ de gravitation pour $r > R$ en le prenant nul à l'infini.

Dans le référentiel jupiterocentrique supposé galiléen, Jupiter est animée d'un mouvement de rotation supposé uniforme autour de l'axe polaire (Oz), la période associée à ce mouvement de rotation valant $T_{\text{sid}} = 0,41$ jour terrestre. Chaque volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ de l'atmosphère de Jupiter, de centre P, immobile dans le référentiel lié à Jupiter et de masse δm possède donc, dans ce référentiel, un mouvement de rotation circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_{sid}. L'origine du repère est choisie au centre de Jupiter qui présente une symétrie de révolution autour de l'axe passant par les pôles (Oz) (mais qui n'est plus supposée sphérique).

Q23. Exprimer, en fonction de ses deux coordonnées sphériques r et θ et de ω_{sid}, le vecteur accélération du centre P du volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ dans le référentiel jupiterocentrique.

Q24. Jupiter possède la forme d'un ellipsoïde de révolution. Le rayon polaire possède la valeur $R_P = 6,68 \cdot 10^4$ km et le rayon équatorial possède la valeur $R_E = 7,15 \cdot 10^4$ km. Comment expliquer simplement la forme de cette planète ?

On définit l'aplatissement relatif ε par $\varepsilon = \dfrac{R_E - R_P}{R_E}$. Du fait de l'aplatissement de Jupiter, le potentiel gravitationnel à grande distance a pour expression, avec $K = \dfrac{I_J}{M_J R_J^2}$ où I_J est le moment d'inertie diamétral qu'aurait Jupiter, de masse M_J et de rayon R_J, sans rotation propre (donc sans le phénomène d'aplatissement),

$$\Phi(r\,,\,\theta) = \frac{\mathscr{G} M_J}{r}\left[-1 + \frac{\varepsilon K}{2}\left(\frac{R_J}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta - 1\right)\right]. \tag{7}$$

On donne la valeur du moment d'inertie diamétral d'une boule pleine, de rayon R et masse volumique uniforme ϱ : $I = \dfrac{8\pi}{15}\varrho R^5$.

Q25. Si Jupiter était assimilable en l'absence de rotation propre à une boule pleine, homogène, de masse volumique uniforme évaluée à la **question Q2**, quelle devrait être la valeur de la constante $K = \dfrac{I_J}{M_J R_J^2}$?

Q26. L'étude du champ de gravitation par la sonde Juno permettra l'estimation de la constante K. En quoi la connaissance de K est-elle intéressante ?

Les couches supérieures de l'atmosphère de Jupiter sont riches en hélium et dihydrogène gazeux. On considère alors une région de l'atmosphère de Jupiter à une température T. Soit $\mathrm{d}N$ le nombre d'entités (atomes ou molécules) de masse m dont le module de la vitesse est compris entre v_r et $v_r + \mathrm{d}v_r$. On suppose une distribution telle que :

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v_r^2}{2 k_B T}\right) \times 4\pi v_r^2 \,\mathrm{d}v_r = f(v_r)\,\mathrm{d}v_r \,. \tag{8}$$

Q27. Calculer la valeur de v_r qui rend $f(v_r)$ maximale. On l'appelle vitesse la plus probable d'agitation thermique et on la note v_c.

Q28. Expliquer alors pourquoi, contrairement à l'atmosphère terrestre, l'atmosphère de Jupiter peut être riche en dihydrogène ou hélium. On pourra comparer les valeurs des vitesses de libération de la Terre et de Jupiter.

Conclusion

Depuis son arrivée dans le voisinage de Jupiter, Juno a permis de confirmer l'affaiblissement de la grande tache rouge et sa probable disparition d'ici quelques dizaines d'années. Elle a également révélé l'existence de gigantesques orages aux pôles de la planète et délivre des centaines d'images de la géante gazeuse.

Document 2 - Données

Notations et valeurs numériques

Constante d'Avogadro	$\mathscr{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Masses molaires (en g·mol^{-1})	$\mathscr{M}_{\text{H}} = 1,0$; $\mathscr{M}_{\text{He}} = 4,0$; $\mathscr{M}_{\text{Ge}} = 72,6$
Numéros atomiques	$Z(O) = 8$ et $Z(S) = 16$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}
Constante de la gravitation universelle	$\mathscr{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}
Accélération de la pesanteur terrestre	$g = 9,8$ m·s^{-2}
Pouvoir de résolution de l'œil	$\varepsilon_{\text{œil}} = 1,5'$
Conversion	$1^\circ = 60'$ (minutes d'angle)
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg
Masse de Jupiter	$M_J = 1,97 \cdot 10^{27}$ kg
Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km
Rayon de Jupiter	$R_J = 7,0 \cdot 10^4$ km
Rayon de l'orbite terrestre	$d_T = 1,50 \cdot 10^8$ km
Rayon de l'orbite de Jupiter	$d_J = 7,80 \cdot 10^8$ km
Période de révolution sidérale de la Terre	$T_T = 365,25$ jours

Données thermodynamiques à 298 K :

Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ et entropie molaire standard S_m°

	$O_{2(g)}$	$SO_{2(g)}$	$SO_{3(g)}$
$\Delta_f H^\circ$ (en kJ·mol^{-1})	•	−296,8	−395,7
S_m° (en J·K^{-1}·mol^{-1})	205,0	248,1	256,7

Une formule d'analyse vectorielle

On considère le champ scalaire suivant : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors : $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f\right)$

Opérateur gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi}\right)}$$

FIN