

F/ Propagation de la tension le long d'une ligne électrique

On se propose ici d'étudier la propagation des signaux électriques dans une ligne monophasée, assimilée à deux câbles (en réalité il y en a plus, voir partie précédente) de longueur L_c .

Dans un premier temps, un tronçon de longueur dx de cette ligne monophasée, que l'on considère très petite devant toutes les longueurs caractéristiques du phénomène, peut-être modélisé par une inductance ℓdx et une capacité αdx (ℓ et α étant constantes) selon le schéma de la FIGURE 10.

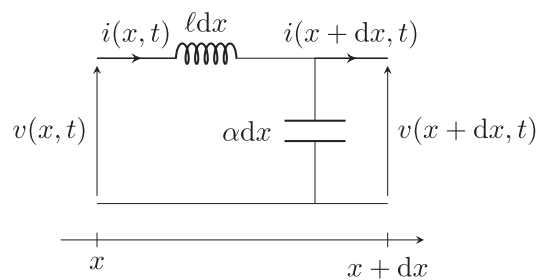


FIGURE 10 – Schématisation de la ligne électrique monophasée entre x et $x + dx$ à l'instant t .

F1. L'ordre de grandeur de L_c est de 50 km. L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS) est-elle valable en tout point du câble? Justifier. On rappelle que la fréquence du signal est $f_r = 50$ Hz.

F2. Montrer que l'application des lois de l'électrocinétique dans l'ARQS permet d'établir les deux équations suivantes

$$\begin{cases} v(x, t) = \ell dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) + v(x + dx, t) , \\ i(x, t) = \alpha dx \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t) + i(x + dx, t) . \end{cases} \quad (11)$$

F3. En déduire que $v(x, t)$ vérifie une équation de D'Alembert et exprimer la célérité c des ondes associées en fonction de ℓ et α .

On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de pulsation ω .

F4. Déterminer la relation de dispersion des ondes dans ce milieu entre la pulsation et le nombre d'onde noté k . Donner la définition d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Le milieu est-il dispersif? Est-il absorbant? Les réponses devront être succinctement justifiées.

On cherche une solution sous la forme de la somme d'une OPPH incidente notée $\underline{v}_+(x, t)$ se propageant vers les x positifs et d'une onde réfléchie $\underline{v}_-(x, t)$ se propageant vers les x négatifs. On note respectivement $\underline{V}_+$ et $\underline{V}_-$ les amplitudes complexes de ces ondes. Chaque onde de tension est de plus associée à un courant $\underline{i}_+(x, t)$ et $\underline{i}_-(x, t)$, d'amplitudes $\underline{I}_+$ et $\underline{I}_-$. On définit enfin l'impédance $\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$ du milieu, qui dépend du type d'onde qui s'y propage.

F5. Donner la forme des OPPH incidentes et réfléchies en tension. En utilisant les relations de l'équation (11), exprimer l'impédance du milieu pour les ondes incidentes, notée $\underline{Z}_+$, et pour les ondes réfléchies $\underline{Z}_-$, en fonction de ℓ et α . Quelle est l'unité des impédances $\underline{Z}_+$ et $\underline{Z}_-$?

La tension d'entrée du réseau basse tension, en $x = 0$, est $v(0, t) = \sqrt{2}U_r \cos(\omega t)$ où $U_r = 230$ V. Le circuit est fermé en $x = L_c$ sur une habitation modélisée par une simple résistance R' .

F6. Écrire, sans les résoudre, les deux équations correspondantes aux conditions de bord et permettant d'obtenir $\underline{V}_-$ et $\underline{V}_+$.

F7. Déterminer l'expression de R' en fonction de ℓ et α afin d'annuler l'onde réfléchie. Qualitativement, quel est l'avantage de cette situation d'un point de vue énergétique?

En réalité, il y a des pertes d'énergie dues à la nature résistive des câbles. On ajoute une résistance en série avec l'inductance $r dx$ et une autre résistance linéique de valeur $\frac{1}{g dx}$, en parallèle avec la capacité (c'est-à-dire que $g dx$ est l'admittance de cette résistance).

F8. Quelles sont les deux nouvelles équations différentielles couplées et du premier ordre en x et en t vérifiées par $v(x, t)$ et $i(x, t)$?

F9. On considère des solutions de la forme $\underline{v}(x, t) = \underline{V}(x) \exp(j\omega t)$ et $\underline{i}(x, t) = \underline{I}(x) \exp(j\omega t)$. Montrer que $\underline{V}(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \underline{V}}{dx^2} = \underline{Z}_s \underline{Y}_p \underline{V} , \quad (12)$$

avec $\underline{Z}_s = j\ell\omega + r$ et $\underline{Y}_p = j\alpha\omega + g$.

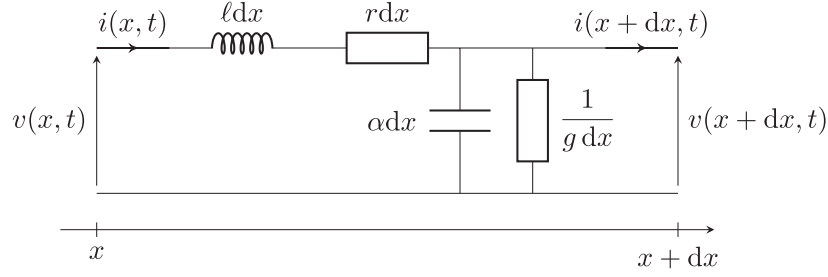


FIGURE 11 – Schématisation de la ligne électrique monophasée avec pertes entre x et $x + dx$ à l'instant t .

On note $\underline{k}(\omega) = k''(\omega) + jk'(\omega)$ tel que $\underline{k}^2 = \underline{Z}_s \underline{Y}_p$, $k'(\omega) > 0$ et $k''(\omega) > 0$. Les solutions de l'équation précédente conduisent à

$$\begin{aligned} \underline{v}(x, t) = & \underline{V}_1 \exp \left[-k''(\omega)x + j(\omega t - k'(\omega)x) \right] \\ & + \underline{V}_2 \exp \left[k''(\omega)(x - L_c) + j(\omega t + k'(\omega)x) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

F10. Sans chercher à déterminer les expressions de $k'(\omega)$ et de $k''(\omega)$, préciser si ce milieu est dispersif et/ou absorbant.

En choisissant judicieusement les composants et la géométrie de la ligne, il est possible de respecter la condition $\ell g = r\alpha$. Dans ce cas, on trouve $k'(\omega) = \omega\sqrt{\ell\alpha}$ et $k''(\omega) = g\sqrt{\frac{\ell}{\alpha}}$. On montre aussi que $k''(\omega)$ est minimal lorsque cette condition est respectée.

F11. Quels sont les avantages à choisir les paramètres des câbles tels que $\ell g = r\alpha$?

On admet que sous la condition $\ell g = r\alpha$, la résistance R' permettant d'annuler l'onde réfléchie est la même que celle obtenue dans la question F7. Les ordres de grandeurs sont $g \simeq 2,1 \times 10^{-9} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\alpha \simeq 6,3 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\ell \simeq 1,0 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

F12. Calculer numériquement k'' lorsque $\ell g = r\alpha$. En l'absence d'onde réfléchie, calculer la variation relative de l'amplitude de la tension aux bornes de R' lorsque l'on prend en compte les pertes dans la ligne par rapport au cas sans perte. Commenter.

Fin de l'épreuve