La notation complexe

I. **Principe de la notation complexe**

Quand on est amené à résoudre une équation différentielle dont le second membre est sinusoidal, on cherche uniquement la solution particulière de l'équation différentielle et pour cela on se place en notation complexe: cela s'appelle étudier le régime forcé.

La solution générale n'a pas d'intérêt car elle correspond au régime transitoire qui, quelque soit sa nature: pseudo-périodique, critique ou apériodique, tend rapidement vers zéro.

A toute grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega + \phi)$ on associe le complexe $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t+\phi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ où $\underline{X_m}$ désigne l'amplitude complexe égale à $X_m e^{j\phi}$.

On déduit $\underline{X_m}$ de l'équation différentielle et on en déduit:

- l'amplitude X_m des oscillations en prenant le module de $\underline{X_m}$

- le déphasage ϕ des oscillations en prenant l'argument de $\underline{X_m}$

Dans l'équation différentielle on remplace $\dfrac{d}{dt}$ par $j\omega$ et $\dfrac{d^2}{dt^2}$ par $(j\omega)^2 = -\omega^2$.

II. **Conductivité électrique**

Un plasma est constitué d'ions positifs de charge $+e$, de masse M et d'électrons de charge $-e$, de masse $m << M$. Les densités volumiques des ions et des électrons sont égales. On la note n. Les ions sont supposés immobiles et les électrons possèdent une vitesse $\overrightarrow{v}$. L'ensemble est plongé dans un champ électrique qui s'écrit en cartésiennes : $\overrightarrow{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \overrightarrow{e_y}$ en représentation complexe.

1. Justifier l'immobilité des ions.

2. Justifier le fait que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique.

3. Etablir la relation entre la représentation complexe de la vitesse $\underline{\overrightarrow{v}}$, $\underline{\overrightarrow{E}}$ et les données de l'exercice en supposant que les électrons subissent la force d'interaction avec les autres électrons et les noyaux $\overrightarrow{f} = -\dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$. En déduire l'expression (en notation complexe) de la densité volumique de courant $\underline{\overrightarrow{j_e}}$ et l'expression de la conductivité thermique $\underline{\gamma}$.

III. **Absorption du rayonnement**

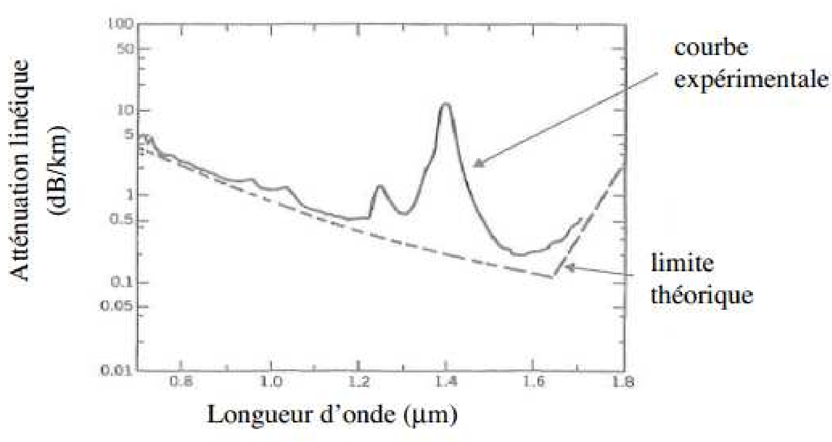


Figure 11 – Atténuation linéique de puissance en fonction de la longueur d'onde

Le coeur de la fibre est fabriqué en verre de silice. Le pic principal de la figure 11 est dû à la présence, en son sein, d'impuretés que sont les ions HO^-. Un modèle simple permettant de justifier ce pic consiste à modéliser l'interaction entre les deux atomes d'oxygène O et d'hydrogène H par un ressort, de longueur à vide l_0 et de raideur k, les reliant. Dans l'étude qui suit, on considère que les deux atomes, de masses respectives m_O et m_H, sont seuls et ne subissent aucune force de liaison extérieure. On se place dans un référentiel galiléen auquel on associe le repère de centre C, correspondant au centre de l'atome d'hydrogène au repos, et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$ parallèle à l'axe du ressort dirigé de l'atome O vers l'atome H (figure 12). On repère la position de l'atome H à un instant quelconque t par l'abscisse $x(t)$. Les effets liés à la gravité sont négligés.

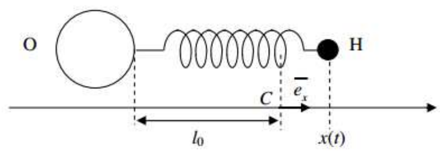


Figure 12 – Modélisation de l'interaction entre les atomes O et H de l'impureté HO⁻

1. Justifier qualitativement que l'on puisse considérer l'atome d'oxygène fixe et que seul l'atome d'hydrogène soit mobile.

2. La différence d'électronégativité entre les atomes d'oxygène et d'hydrogène entraîne l'apparition d'une charge électrique q au voisinage de l'atome d'hydrogène. Expliquer pourquoi la lumière guidée dans la fibre va donc, en arrivant sur une impureté HO^-, mettre en mouvement l'atome d'hydrogène.

3. En considérant une lumière monochromatique, de pulsation ω, à laquelle on associe un champ électrique $\overrightarrow{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. Préciser l'expression de la fréquence propre du système f_0.

4. Résoudre, en régime sinusoïdal établi, l'équation différentielle. Représenter graphiquement l'amplitude (positive) de la solution particulière en fonction de la fréquence f. Que peut-on observer et que manque-t-il au modèle pour mieux correspondre à la réalité ? Comment serait alors modifié le graphe précédent ?

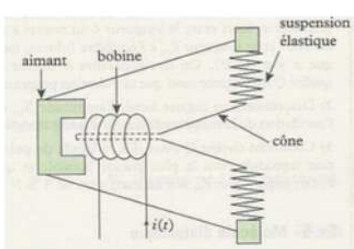
5. Le pic principal de la figure 11 correspond, en fait, non pas au mode fondamental mais au premier harmonique de l'oscillation de la liaison entre les atomes d'hydrogène et d'oxygène. En prenant $m_H = 1,7.10^{-27}\ kg$, déduire de la longueur d'onde λ_{OH} de ce grand pic d'absorption, la constante de raideur du ressort.

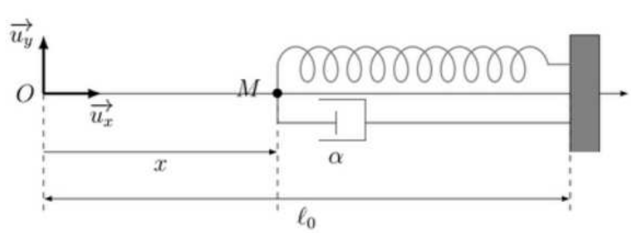
Réponse: 5- $k = 770\ N.m^{-1}$

IV. **Le haut-parleur**

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m se déplaçant horizontalement le long d'un axe Ox. Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et raideur k et à un amortisseur fluide exerçant une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.

La masse par ailleurs soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$ imposée par le courant $i(t)$ dans le haut-parleur. On a la relation $\overrightarrow{F}(t) = Ki(t)\overrightarrow{u_x}$ où K est une constante. On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et avec un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.





Données : $m = 10\ g$, $K = 200\ N.A^{-1}$ et $I_m = 1\ A$.

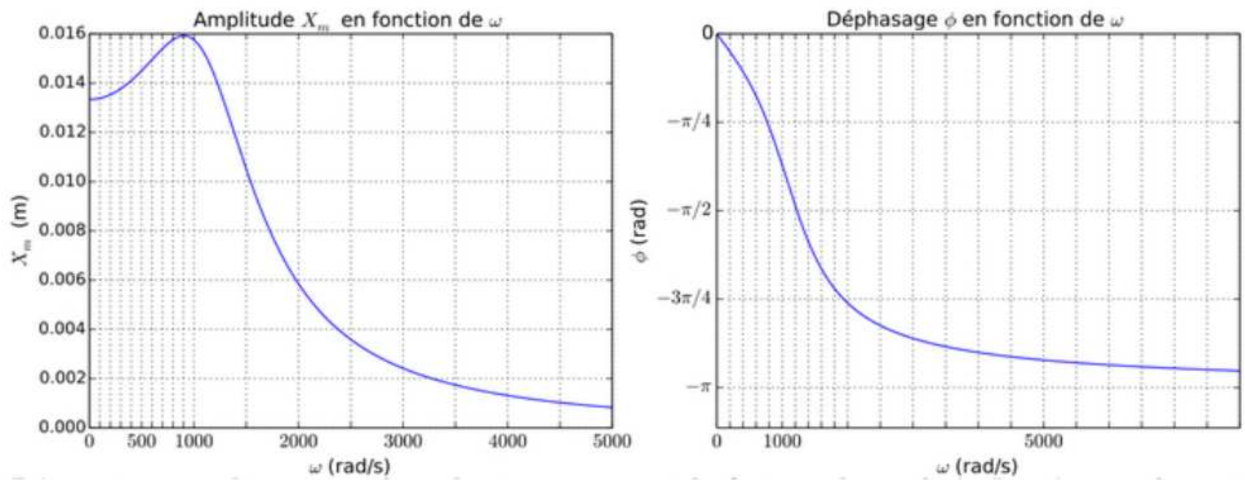
1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m.

2. Justifier que la réponse en régime forcée s'écrit sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$. Que devient cette expression en complexe ?

3. Montrer que l'amplitude complexe $\underline{X_m}$ peut se mettre sous la forme $\underline{X_m} = \dfrac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$. Exprimer X_0, ω_0 et Q en fonction des données.

4. En déduire X_m et déterminer les limites de X_m aux BF et HF, ainsi que l'existence ou non d'une résonance.

5. On donne les courbes de X_m et ϕ. Déterminer à l'aide de ces graphiques la valeur de k et la valeur du facteur de qualité. En déduire α.



Réponses: 3- $X_0 = \dfrac{KI_m}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *et* $Q = \dfrac{\sqrt{K\alpha}}{m}$ *4- résonance pour* $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ *5-* $k = 15.10^3\ N.m^{-1}$ *et* $Q = 1$ *et* $\alpha = 12\ SI$