Calculer numériquement τ avec les valeurs suivantes :
$\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^3\,\text{kg·m}^{-3}$, $p_{\infty,0} = 1{,}0 \cdot 10^5\,\text{Pa}$, $p_{sat}(T) = 2{,}4 \cdot 10^3\,\text{Pa}$, $R_0 = 2{,}0\,\text{mm}$. Commenter par rapport à la durée typique d'évolution d'une bulle dans une boisson pétillante.

Partie III - Propagation des ondes électromagnétiques dans l'eau de mer

On s'intéresse dans cette partie à quelques aspects de la transmission des ondes électromagnétiques dans l'eau de mer. La particularité de ce milieu est qu'il n'est ni un bon conducteur, ni un bon isolant. Ainsi, les ondes radio habituelles (stations radio, téléphones portables…) sont inutiles dans le cas des transmissions avec un sous-marin en plongée.
On va supposer que l'eau de mer est un milieu linéaire, homogène et isotrope, de conductivité $\gamma = 4\ \text{S·m}^{-1}$, la loi d'Ohm locale peut s'appliquer.

On admet que pour tenir compte des propriétés spécifiques de l'eau de mer, on est conduit à remplacer la permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{F·m}^{-1}$ par la permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell. La permittivité relative sera prise constante : $\varepsilon_r = 81$. On prendra aussi pour toute la suite la perméabilité magnétique comme étant celle du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H·m}^{-1}$.

Q13. Donner les quatre équations de Maxwell (ainsi que leur nom) pour l'eau de mer. En déduire l'équation locale de conservation de la charge électrique. À l'aide de cette dernière, montrer que l'eau de mer est effectivement un milieu localement neutre. On fera intervenir pour cette réponse un temps de relaxation τ_R à exprimer en fonction de ε et γ et dont on calculera la valeur numérique.

On suppose par la suite que l'eau de mer est effectivement localement neutre. On cherche dans l'eau de mer des solutions en onde plane progressive harmonique (OPPH) de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0} e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \overrightarrow{OM})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}_0} e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

avec un vecteur d'onde $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire réel.

Q14. À partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles dont $\underline{\vec{E}}(M,t)$ est solution.

Q15. Établir la relation de dispersion de l'OPPH dans l'eau de mer. Montrer que l'on retrouve la relation de dispersion dans le vide si la conductivité est nulle et si $\varepsilon = \varepsilon_0$.

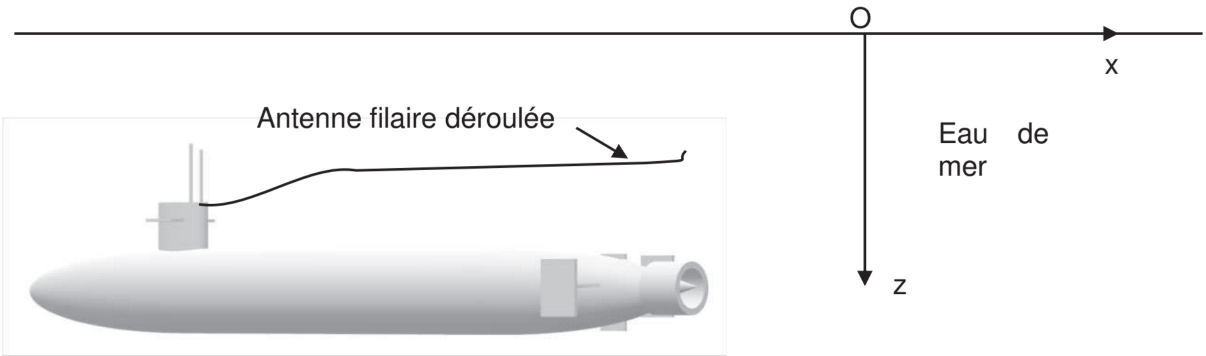

Figure 9- Sous-marin en immersion

On s'intéresse à la propagation d'une OPPH polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$, vecteur unitaire porté par l'axe (Ox) (voir la **figure 9**). L'onde se propage dans l'eau suivant l'axe (Oz) perpendiculairement à la surface de l'eau (plan (Oxy).
On pose $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}_z = (k_r - jk_i)\vec{u}_z$ avec k_r et k_i réels positifs.

Q16. Après avoir déterminé le champ $\underline{\vec{B}}(M,t)$, donner l'expression de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle\vec{\Pi}\rangle$ en fonction de $\mu_0, \omega, k_r, k_i, |\underline{E}_0|$ et de z.

L'intensité énergétique $I = \left\|\langle\vec{\Pi}\rangle\right\|$ peut se mettre sous la forme $I(z) = I(0)e^{-\alpha z}$. On définit alors une atténuation $A_{dB} = 10\log\left(\dfrac{I(0)}{I(z)}\right)$ exprimée en décibel.

Q17. Identifier le coefficient α. Montrer que l'atténuation par unité de longueur, $\dfrac{A_{dB}}{z}$, est proportionnelle à k_i.

Q18. Montrer que pour $\omega \ll \dfrac{\gamma}{\varepsilon}$, $\underline{k} = \pm\dfrac{1-j}{\delta}$. Exprimer la grandeur δ. Comment varie l'atténuation par unité de longueur dans ce cas ? Calculer numériquement δ pour des ondes dites VLF (Very Low Frequency) comprises entre 3 kHz à 30 kHz utilisées pour communiquer avec un sous-marin en plongée. Faire le calcul pour les deux valeurs extrêmes de fréquences. Commenter en rapport avec la **figure 9**.

Données du problème de physique
- Intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ - Masse volumique de l'eau de mer : $\rho_0 = 1{,}0\cdot10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Cette valeur sera supposée constante dans tout le problème. - La valeur moyenne temporelle du produit de deux fonctions sinusoïdales f et g de même période peut être calculée à partir de leurs représentations complexes à l'aide de la formule : $< f \times g > = \dfrac{1}{2}Re(\underline{f} \times \underline{g}^*)$ où $\underline{g}^*$ est le conjugué de $\underline{g}$ - $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$ - $div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0$ - En coordonnées sphériques : $div\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}$ - $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v} = v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$ en coordonnées sphériques, pour $\vec{v} = v_r(r,t)\vec{e}_r$ - $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$