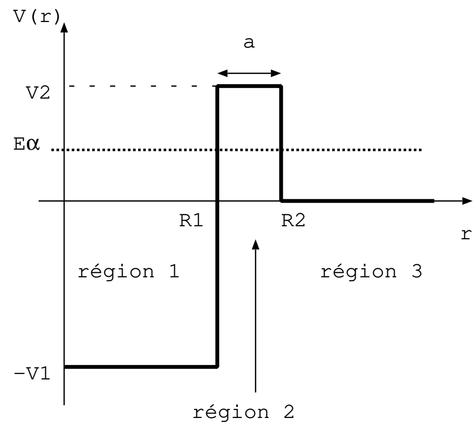
Evaluation mécanique quantique

I. Radioactivité α

La désintégration α d'un noyau radioactif X_Z^A, appelé noyau père, conduit à l'émission d'un noyau d'hélium 4 noté He encore appelé particule α. De cette désintégration résulte un noyau dit fils Y_{Z-2}^{A-4}. Ce mode de désintégration est résumé par l'équation bilan : $X_Z^A \rightarrow Y_{Z-2}^{A-4} + He_2^4$. La particule α émise possède l'énergie mécanique E_α. Les noyaux père et fils sont supposés immobiles car ils sont très lourds.

On désigne par r la distance entre le centre de la particule α et le centre du noyau fils. La particule est soumise à un potentiel V, tel que : $V = -V_1$ pour la région 1 $r < R_1$, $V = V_2$ pour la région 2 $R_1 < r < R_2$ et $V = 0$ pour la région 3 ($r > R_2$). La barrière de potentiel est d'épaisseur $a = R_2 - R_1$.



1. Prévoir du point de vue classique les régions accessibles par la particule α. Quel est le nom de l'effet associé au passage de la particule α à travers la barrière de potentiel ?

2. A quelle interaction est liée le puits de potentiel ? Quelle interaction est présente dans la région 3? Donner les principales caractéristiques de ces interactions.

La particule α d'énergie E_α arrive de la région 1 sur la barrière de potentiel. Nous considérons que : $0 < E_\alpha < V_2$. Nous rappelons que la fonction d'onde radiale $\phi(r)$ de la particule définie à partir de la fonction d'onde par $\underline{\psi}(r,t) = \phi(r)e^{-iE_\alpha t/\hbar}$ vérifie l'équation de Schrödinger en régime stationnaire à une dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dr^2}(r) + V(r)\phi(r) = E_\alpha \phi(r)$$

3. Montrer que la fonction d'onde radiale $\phi(r)$ se met, selon la région, sous la forme :

Région 1 : $\phi_1(r) = Ae^{jk_1r} + Be^{-jk_1r}$

Région 2 : $\phi_2(r) = Ce^{k_2r} + De^{-k_2r}$

Région 3 : $\phi_1(r) = Fe^{jk_3r} + Ge^{-jk_3r}$

où A, B, C, D, F et G sont des constantes a priori complexes et j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. Donner les expressions des constantes k_1, k_2 et k_3. Pour la région 2, de quel type d'onde parle-t-on? Représenter le module au carré de la fonction d'onde par région.

4. Quelle est la valeur de la constante G ? Justifier votre réponse. Pour la région 2, de quel type d'onde parle-t-on? Représenter le module au carré de la fonction d'onde par région.

5. Ecrire les équations de continuité reliant les constantes A, B, C, D et F et les données de l'énoncé, sans chercher les résoudre.

6. On montre que le courant de probabilité stationnaire de la région 1 a pour expression : $\overrightarrow{J_1} = \frac{\hbar}{m_\alpha}k_1(|A|^2 - |B|^2)\overrightarrow{e_r}$ où $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire dirigé du noyau fils vers la particule α.

Que représente la quantité $\overrightarrow{J} = \frac{\hbar}{m_\alpha}k_1|A|^2\overrightarrow{e_r}$?

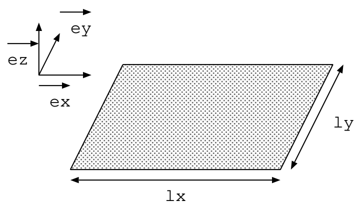
Définir le coefficient de transmission à travers la barrière, noté P, en fonction des courants de probabilité. Exprimer P en fonction de $|A|$, $|F|$, k_1 et k_3.

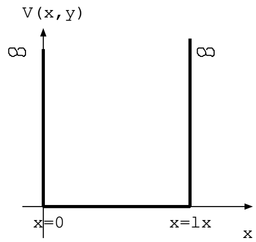
II. Gaz d'électrons dans un champ magnétique

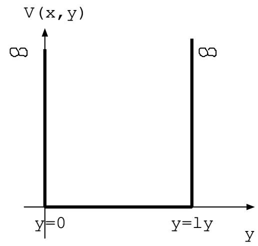
On considère des électrons mobiles comme un gaz de particules quantiques libres n'interagissant pas entre-elles et confinées dans une structure cristalline particulière qui ne leur permet de se déplacer selon Ox uniquement entre $x = 0$ et $x = l_x$ et selon Oy uniquement entre $y = 0$ et $y = l_y$.

On assimile cette situation à celle d'un puits de potentiel infini rectangulaire de longueur l_x et de largeur l_y pour lequel l'énergie potentielle $V(x,y)$, s'écrit :

- $V(x,y) = 0$ à l'intérieur du puits
- $V(x,y) = +\infty$ à l'extérieur du puits







On suppose les directions x et y indépendantes de sorte à pouvoir traiter le problème à une seule dimension suivant x dans un premier temps.

On note $\underline{\psi}(x,t) = \phi(x)e^{-iE_xt/\hbar}$ la fonction d'onde associée à l'énergie E_x de l'électron confiné dans un puits infini à une dimension de largeur l_x avec $\phi(x)$ une fonction a priori complexe ne dépendant que de x.

1. Que représente $|\underline{\psi}(x,t)|^2$? Justifier le caractère stationnaire des états de l'électron.

2. Écrire la condition de normalisation portant sur l'axe Ox. Quelles sont les conditions aux limites à imposer à la fonction $\phi(x)$?

3. Donner un exemple ayant des conditions aux limites similaires dans un autre domaine de la physique.

On rappelle qu'une fonction d'onde $\underline{\psi}$ associée à une énergie E des états stationnaires d'une particule quantique est solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\psi} + V\underline{\psi} = E\underline{\psi}$$

4. Montrer que l'équation de Schrödinger pour la fonction $\phi(x)$ à l'intérieur du puits peut s'écrire : $\phi''(x) + k_x^2\phi(x) = 0$. Exprimer k_x en fonction de E_x, m et $\hbar$.

5. Exprimer $\phi(x)$ et déduire des relations de continuité que l'énergie est quantifiée et exprimer E_x en fonction d'un entier positif n_x non nul, de $\hbar$, m et l_x.

6. Exprimer alors par analogie le module d'onde k_y en fonction de n_y et l_y ainsi que les énergies E_y liées.

Ce gaz d'électrons est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$. La fonction d'onde s'écrit $\underline{\psi}(x,y,t) = \psi(x,y)e^{-iEt/\hbar}$ avec $\psi(x,y) = \Omega(x)e^{ik_y y}$. On montre que $\Omega(x)$ vérifie l'équation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Omega''(x) + V_{eff}(x)\Omega(x) = E\Omega(x)$$

avec $V_{eff}(x) = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2(x-x_0)^2$ en posant $\omega_0 = \dfrac{eB}{m}$ et $x_0 = \dfrac{\hbar k_y}{eB}$.

7. Quel système présente une énergie potentielle similaire dans un autre domaine de la physique ? Représenter $V_{eff}(x)$.

8. La modélisation impose au centre x_0 de l'énergie potentielle effective d'être situé à l'intérieur du gaz d'électrons. Quelle est alors la valeur maximale possible pour k_y ?

9. En supposant que la quantification du module d'onde k_y reste identique à celle du puits infini unidimensionnel vu précédemment, montrer que l'entier n_y doit satisfaire à l'inégalité : $n_y \leq \dfrac{2eBl_xl_y}{h}$. En tenant compte du spin de l'électron, c'est-à-dire qu'il existe deux états possibles sur un même niveau d'énergie, en déduire le nombre maximum d'états d'un électron d'énergie E.